Теория, математическое моделирование и прогнозирование развития рынка

Юрий Машунин[1,*]

[1] Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

Информация о статье
Поступила в редакцию:
25.10.2016
Принята к опубликованию:
31.10.2016

УДК 51-77
JEL C 61

Ключевые слова:
рынок, спрос и предложение, модель рынка, векторная оптимизация, моделирование, прогнозирование, принятие решений.

Аннотация
Представлена методология создания математической модели рынка. Показаны построение модели спроса–предложения в виде нелинейной задачи математического программирования и способность математической модели рынка решать вопросы целенаправленности участников рынка (конкуренции) в совокупности. Методология моделирования рынка с учетом функций спроса и предложения рассмотрена на числовом примере векторной задачи математического программирования.

Theory, mathematical modeling and forecasting of market development

Yuriy Mashunin

Keywords:
market, demand and supply, market model, vector optimization, Simulation, forecasting, decision making.

Abstract
The purpose of this study is the creation of a market model in the form of a vector problem of mathematical programming in which the balance between supply and demand is approached from the perspective of the focus of market participants. In order to identify an effective work objective theory review and a problem modeling of the market was carried out. Accordingly a series of recommendations based on the economic behavior model of supply and demand is presented for this market. The models of demand and supply were created by the use nonlinear task mathematical programs. The mathematical market model was constructed by integrating mathematical models of demand and supply.
The model resolves issues of the focus of market participants (competition) in total. The mathematical market model is provided by a vector problem of mathematical programming whose solution is based on normalization criteria and the principle of the guaranteed result. The methodology for modeling the market took into account functions of demand and supply which is presented on a numerical example of a vector task. The methodology includes problem definition, a model type creation and modeling, market development forecasting.

**Автор для связи*: *E-mail: mashunin@mail.ru*
DOI: https://dx.doi.org/10.5281/zenodo.221323

Введение

Проблема построения модели рынка, моделирование и прогнозирование его развития является одной из важнейших проблем экономики в связи с переходом Российской Федерации на рыночные отношения. Вопросу построения модели рынка уделяется достаточно большое внимание в развитых странах мира с середины 19 в. Большинство моделей рынка строилось по принципу установления конкурентного равновесия, о существовании которого было заявлено в работе Вальраса [1]. Математическое обоснование гипотезы Вальраса было выполнено в 1950-х годах в работах Эрроу–Дебре [2], Маккензи [3], Гейла [4], Никайдо [5]. В дальнейшем велись работы по усовершенствованию моделей и их обобщению. Достаточно полно эти исследования рассмотрены в монографиях Моришимы [6], Никайдо [7], Ланкастера [8] и современных авторов [9, 10]. В большинстве этих работ анализировался баланс совокупного предложения и спроса (т. е. рыночное равновесие) [7, с. 320].

Эти модели рынка устанавливали баланс между предложением и спросом, но не могли являться моделью рынка, так как в них, во-первых, отсутствовала конкуренция как между производителями, так и между потребителями, во-вторых, не отражена целенаправленность действий участников рынка (производителей и потребителей), которая и является основой конкуренции. Не достигли прогресса в этом вопросе и игровые модели [11]. В математической модели рынка должны быть учтены не только противоречия между производителями и потребителями, но и противоречия (конкуренция) отдельных производителей и потребителей друг с другом. Как правило, цели производителя – создать дешевое изделие и продать его по высокой цене, а цели потребителя – купить изделие по наиболее низкой цене, но с высоким качеством.

Модель рынка должна отражать не только баланс между предложением и спросом, но и целенаправленность каждого участника рынка с учетом их общей взаимосвязи. Такой математической моделью, которая может наряду с балансом отразить целенаправленность каждого участника рынка, является векторная (многокритериальная) задача математического программирования [12, 13]. Для решения этой задачи разработаны методы решения векторной задачи, основанные на нормализации критериев и принципе гарантированного результата [14, 15].

Цель данной работы состоит в построении модели рынка в виде векторной задачи математического программирования, в которой выполнен баланс между предложением и спросом и учитывается целенаправленность каждого участника рынка. Работа направлена на решение практических задач моделирования рынка.

Для достижения поставленной цели в работе проведен анализ теории и проблемы моделирования рынка. В соответствии с системой рекомендаций экономического поведения на рынке показано построение модели спроса–предложения, которая представлена нелинейной задачей математического программирования. Путем объединения математических моделей спроса и предложения построена математическая модель рынка, которая решает вопросы целенаправленности участников рынка (конкуренции) в совокупности. Математическую модель рынка представляет векторная задача математического программирования (ВЗМП), решение которой основано на нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Методология моделирования рынка с учетом функций спроса и предложения представлена на числовом примере ВЗМП, которая включает постановку задачи, построение модели вида и непосредственно моделирование и прогнозирование.

1. Анализ теории и проблемы моделирования рынка

Теория рынка как одна из основных частей экономической теории в методическом плане направлена на решение следующих задач:

- систематизация элементов познания действительности;
- определение причинно-следственных и функциональных зависимостей между данными элементами;
- выявление закономерностей, законов и тенденций в экономической реальности;
- разработка системы рекомендаций для экономического поведения индивидуума, фирмы и государства [16].

Систематизация элементов

Рынок определяется взаимодействием трех подсистем:

- всех производителей, которые прогнозируют цену продажи товаров, с ней выходят на рынок и в совокупности формируют «предложение»;
- товара, который может приобретать различную форму;
- всех потребителей, которые, анализируя предложенную цену продажи, решают вопрос о покупке и в совокупности формируют «спрос» на рынке.

Определения причинно-следственных и функциональных зависимостей между данными подсистемами выявляются при исследовании параметров рынка и рыночных структур. Эти исследования важны по двум главным причинам. Во-первых, исследования в этой области оказывают непосредственное влияние на определение и внедрение государственной политики в таких сферах, как выбор между государственными и частными предприятиями, регулированием и дерегулированием развития отраслей, поддержание конкуренции через антитрестовскую политику, реализация политики свободной торговли, стимулирования технологического прогресса и многое другое. Во-вторых, они важны для развития теории отраслевых рыночных структур.

Для исследования рынка по схеме «объект (рынок) – модель» используем парадигму «базовые условия – структура рынка – поведение – результативность» [10], которую дополним блоком «моделирование». Такой подход можно рассматривать как системный подход (системный анализ + моделирование).

Результативность рынка предполагает следующее:

а) решения о том, что, сколько и как производить, должны быть эффективными в двух отношениях: ограниченные ресурсы не должны расточаться, количественно и качественно, они должны соответствовать требованиям потребителей;

б) деятельность производителей должна быть прогрессивной, они должны использовать преимущества науки и техники для увеличения выпуска продукции на единицу затрат и обеспечивать потребителей новыми наилучшими продуктами. При этом должен поддерживаться долгосрочный рост реальных доходов на душу населения;

в) деятельность производителей должна способствовать полному использованию ресурсов, особенно трудовых;

г) распределение дохода должно быть справедливым. Справедливость чрезвычайно трудно определить, но она, по крайней мере, предполагает, что производители не получают дохода сверх уровня, необходимого для возмещения затрат по предоставленным услугам. С этой целью связано желание обеспечить разумную стабильность цен, так как неуправляемая инфляция искажает распределение дохода самым нежелательным образом.

Рис. 1. Схема взаимосвязи блоков «базовые условия–структура рынка–поведение–результативность» [10], добавленная блоком «моделирование»

Выявление закономерностей, законов и тенденций в соответствии с представленными целями позволяет определить ряд свойств или переменных, влияющих на экономическую результативность, и вывести соотношения, конкретизирующие связи между этими признаками и реальной результативностью экономической системы, опираясь на базовые модели и моделирование.

Базовые модели, используемые во многих исследованиях, посвященных теории отраслевых рыночных структур, были предложены Эдвардом С. Мейсоном (Гарвард) в 30-е годы прошлого века и доработаны впоследствии многими научными школами. Они включают блоки спроса и предложения, которые оказывают основное влияние на структуру рынка, поведение продавцов и покупателей и, как следствие, оценку эффективности рынка (рис. 1).

Предложение. На структуру рынка, в свою очередь, воздействует множество базовых условий. Например, со стороны предложения базовые, определяющие структуру условия включают: размещение и право собственности на основные виды сырья; особенности соответствующей технологии (дискретный или непрерывный характер производства, высокая или низкая эластичность замещения факторов производства); вовлечённость рабочей силы в профсоюзное движение, длительность использования продукта, временные характеристики производства (например, производятся ли товары по заказу или поставляются со склада); затраты на единицу выпуска; и т. д.

Спрос. Перечень наиболее важных базовых условий со стороны спроса должен включать: ценовую эластичность спроса при различных ценах, доступность товаров-заменителей и перекрёстную эластичность спроса на них, темпы роста и временные колебания спроса, метод осуществления покупок покупателями и т.д.

Моделирование. Исследованию взаимосвязи базовых моделей со структурой рынка, а также поведение продавцов и покупателей направлен блок моделирования, где исследование ведется по двум основным направлениям.

1. Исследование и анализ статистической информации. Здесь используются эконометрические методы и модели: функции спроса–предложения, регрессионный анализ, модели агрегированных рынков.

2. Моделирование и прогнозирование развития рынка на основе векторных оптимизационных моделей. Для решения такого класса задач используются методы решения векторных задач оптимизации, основанные на нормализации критериев и принципе гарантированного результата.

Поведение. Считается, что результативность отдельных отраслей или рынков зависит от поведения продавцов и покупателей в таких вопросах, как ценовая политика и практика, открытые и тайные соглашения между фирмами, продуктовая и рекламная стратегии, затраты на исследования и разработки, инвестиции в производственное оборудование, тактика решения юридических вопросов (например, в обеспечении патентных прав) и т.д.

Структура рынка. Поведение, в свою очередь, зависит от структуры соответствующего рынка, характеризующейся численностью и распределением продавцов и покупателей, уровнем физической (объективной) или субъективной (мнимой) дифференциации. Таким образом, парадигма «базовые условия – моделирование – структура рынка – поведение – результативность» будет обеспечивать как предмет, так и контраргументы для последующего анализа [10].

Система рекомендаций экономического поведения на рынке индивидуума, фирмы и государства может быть разработана по результатам решения задач, лежащих в основе модели рынка. По результатам решения можно попытаться установить, каким образом рыночные процессы направляют деятельность производителей на удовлетворение потребительского спроса, каким образом эти процессы могут нарушаться и каким образом они могут быть отрегулированы так, чтобы результативность экономики соответствовала бы некоторому идеальному (нашему) представлению о ее развитии.

2. Постановка проблемы. Построение модели спроса–предложения

Рынок представляет собой систему экономических взаимоотношений между производителями продукции и потребителями, определяемую свободными ценами на товар в зависимости от спроса и предложения [12], т.е. структуру рынка (рис. 2).

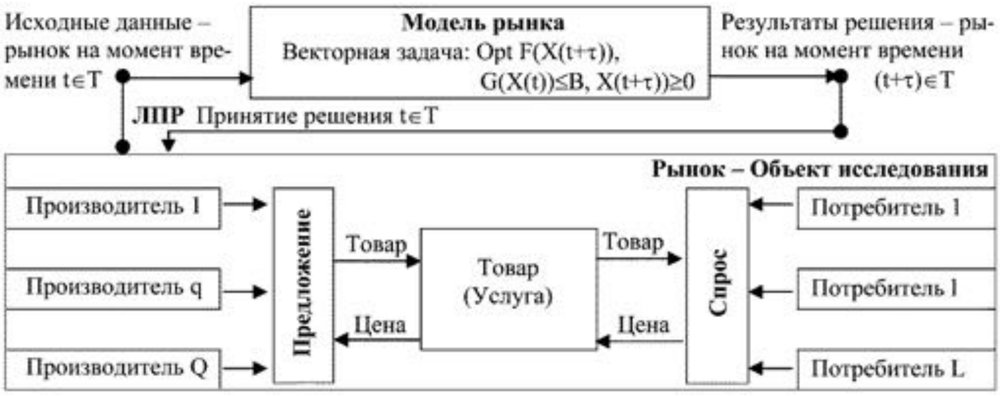

Рис. 2. Схема взаимосвязи рынка с математической моделью

Первая подсистема рынка представлена Q производителями: $q = \overline{1,Q}$ [1], где Q – число, q – индекс, а $\boldsymbol{Q}$ – множество индексов производителей (фирм) $\boldsymbol{Q} \equiv \overline{1,Q}$; вторая подсистема представлена L потребителями продукта отрасли: $l = \overline{1,L}$, где l – индекс, L – число, $\boldsymbol{L}$ – множество потребителей; третья подсистема связующая – товар.

Разработка математической модели рынка состоит из ряда этапов–построений:

- модели спроса во взаимосвязи с функцией спроса на товар и другими целевыми показателями потребителей;
- модели предложения во взаимосвязи с функцией предложения товара и другими целевыми показателями производителей;
- модели рынка, учитывающие цели как потребителей, так и производителей в совокупности, а также функции спроса и предложения в совокупности. Место такой модели представлено на рис. 2. Результат решения модели рынка – объемы спроса предложения на будущий момент времени $(t+\tau)\in T$.

Функция спроса на товар "x" показывает то количество товара, которое будет куплено всеми потребителями в совокупности при различных ценах на него и аналогичные товары, при различных уровнях дохода, а также при других факторах, которые влияют на спрос. Общую функцию спроса на товар "x" можно записать в следующем виде:

$$\theta_x^d = f(c_x, c_y, b_x, h_x), \quad (1)$$

где θ_x^d – количество приобретенного товара "x"; c_x – цена этого товара; c_y – цена взаимозаменяющего товара; b_x – доход (бюджетные ограничения); h_x – значение любой другой переменной, влияющей на спрос (затраты на рекламу, численность населения, качество продукции, транспортные расходы и другие потребительские ожидания) [17].

Эта зависимость может быть как линейной, так и нелинейной.

Линейная функция спроса – форма ее представления, при которой спрос на анализируемый товар задается в виде линейной зависимости от цен, дохода и других переменных, влияющих на спрос:

[1] $Q = \overline{1,Q}$ эквивалентно $q = 1, 2, \ldots, Q$.

$$\theta_x^d = \alpha_o' + \alpha_x c_x + \alpha_y c_y + \alpha_b b_x + \alpha_h h_x, \qquad (2)$$

где α_o, α_x, α_y, α_b, α_h – фиксированные коэффициенты, величины которых могут быть получены на основе исследования статистических данных реализации товара с помощью регрессионного анализа.

Преобразуем выражение (2), предполагая, что факторы c_y, b_x, h_x не изменяются:

$$-\alpha_x c_x = -\theta_x^d + \alpha_o' + \alpha_y c_y + \alpha_b b_x + \alpha_h h_x,$$

а количество приобретенного товара

$$\theta_x^d = \sum_{q=1}^{Q} x_{ql}(t),\ \forall l \in \boldsymbol{L},$$

где $x_{ql}(t)$ – объемы продукта, купленные l-м потребителем у q-го производителя $q=\overline{1,Q}$, $l=\overline{1,L}$ за дискретный период времени $t \in \boldsymbol{T}$. В итоге получим

$$c_x = \alpha_o + \alpha_q \sum_{q=1}^{Q} x_{ql}(t),\ \forall l \in \boldsymbol{L},$$

где $\alpha_o = -(\alpha_o' + \alpha_y c_y + \alpha_b b_x + \alpha_h h_x)/\alpha_x$, $\alpha_q = 1/\alpha_x$.

Перенесем все (Q+1) переменные (c, x_{ql}, $q=\overline{1,Q}$, $l=\overline{1,L}$) в левую часть и приведем равенство к стандартному виду:

$$c - \sum_{q=1}^{Q} a_q x_{ql}(t) = b^d,\ \forall l \in \boldsymbol{L}, \qquad (3)$$

где $c = c_x$, $a_q = \alpha_q$, ограничения $b^d = \alpha_o$.

На действия потребителя накладываются ограничения, связанные с минимальным $b_l^{\min}$, $l=\overline{1,L}$ и максимальным $b_l^{\max}$, $l=\overline{1,L}$ объемами финансовых средств, которые он может выделить на покупку продукта от разных фирм:

$$b_l^{\min} \le \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql} \le b_l^{\max},\ l=\overline{1,L}, \qquad (4)$$

где c_q – стоимость единицы товара, установленной q-й фирмой на рынке.

При покупке продукта определяющими условиями действий потребителя "покупать – не покупать" являются:

- величина цены c_q, установленная q-м производителем – потребитель стремится выбрать тот товар, у которого c_q, $\forall q \in Q$ как можно меньше;

- набор характеристик товара (качество, место расположения продажи, время доступа, реклама и т. д.).

Заметим, что оценка качества товара θ_q, которое всеми потребителями устанавливается для q-го производителя, может быть установлена по 100-балльной шкале, т. е. $\theta_q \le 100$. При этом потребитель стремится выбрать товар с наиболее высоким качеством.

Цель любого потребителя – купить необходимый объем товара по наиболее низкой цене с приемлемым набором характеристик. Эта целенаправленность сформулирована в виде задачи математического программирования [12, 13]:

$$\forall 1 \in \boldsymbol{L},\ \min f_l(X) = \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql}(t) \qquad (5)$$

при ограничениях

$$c - \sum_{q=1}^{Q} a_q x_{ql}(t) = b^d, \tag{6}$$

$$b_l^{\min} \le \sum_{q=1}^{Q} c\, x_{ql}(t) \le b_l^{\max}, \tag{7}$$

$$x_{ql}(t) \ge 0,\ q = \overline{1,Q}, \tag{8}$$

где $f_l(X(t))$ – целевая функция (критерий), $X(t) = \{x_{ql}(t),\ q = \overline{1,Q},\ l = \overline{1,L}\}$ – вектор переменных; величины c, $x_{ql},(t)$ $q = \overline{1,Q}$, $\forall l \in \boldsymbol{L}$ – управляющие переменные, которые представлены в задаче произведением, а отсюда задача оптимизации (5)–(8) – нелинейна, в ней потребитель минимизирует свои затраты за счет стоимости;

(6) – ограничения по спросу на данном рынке (функция спроса);

(7) – бюджетные ограничения – $b_1^{\min}$, $b_l^{\max}$, $\forall l \in \boldsymbol{L}$ – минимальный и максимальный объемы финансовых средств, которые он может выделить на покупку продукта от разных фирм;

(8) – ограничения, определяющие неотрицательность покупаемого товара.

Задача (5)–(8) является моделью поведения любого $l \in \boldsymbol{L}$ потребителя на дискретный период $t \in T$, учитывающей функцию спроса.

Технологию построения и решения оптимизационной задачи (5)–(8) рассмотрим на тестовом примере.

Функция предложения товара описывает, какое количество этого товара будет предложено на рынке по возможным ценам с учетом диапазона цен на исходные ресурсы, а также при различных вариантах других переменных, влияющих на предложение.

Функцию предложения на товар X можно представить в следующем виде:

$$\theta_x^s = f(c_x, c_w, p_r, h_x), \tag{9}$$

где θ_x^s (*supply* – предложение) – количество требуемого товара "x"; c_x – цена этого товара; c_w – цена исходных ресурсов, необходимых для производства (например, цена на сырьё, заработная плата основных производственных рабочих и т. д.); p_r – цена технологически однородных товаров; h_x – значение любой другой переменной, влияющей на предложение товара на рынке (например, доступность технологий, число конкурентов на рынке, размер налогов или ожидания производителей).

Эта зависимость может быть как линейной, так и нелинейной.

Линейная функция предложения – это форма ее представления, при которой предложение на анализируемый товар задается в виде линейной зависимости от цен, дохода и других переменных, влияющих на это предложение:

$$\theta_{\mathrm{x}}^{\mathrm{s}} = \beta_o' + \beta_x c_x + \beta_w c_w + \beta_r p_{\mathrm{r}} + \beta_h h_x,$$

где β_o', β_x, β_w, β_r, β_h – фиксированные коэффициенты, величины которых могут быть получены на основе исследования статистических данных реализации товара с помощью регрессионного анализа [17].

Преобразуем это выражение, предполагая, что факторы c_w, p_r, h_x не изменяются:

$$\theta_x^s = \sum_{l=1}^{L} x_{ql}(t),\ \forall q \in \boldsymbol{Q},$$

в итоге получим

$$c_x = \beta_o + \beta_l \sum_{l=1}^{L} x_{ql}(t),\ \forall q \in \boldsymbol{Q}, \qquad (10)$$

где $\beta_o = (\beta_o' + \beta_w c_w + \beta_r p_r + \beta_h h_x) / \beta_x$, $\beta_l = 1/\beta_x$.

Перенесем в (10) все (L+1) переменные в левую часть и приведем равенство к стандартному виду:

$$c - \sum_{l=1}^{L} a_l x_{ql}(t) = b^s,\ \forall q \in \boldsymbol{Q}, \qquad (11)$$

где $c = c_x$, $a_l = \beta_l$, $b^s = \beta_o$.

При производстве нового продукта основополагающими условиями действия производителя "производить – не производить" являются:

а) величина цены c, установившаяся на рынке – производитель стремится производить тот товар, у которого она как можно выше;

б) оценка факторов: цена на используемые ресурсы, применяемые технологии, число компаний, действующих на рынке, субституты производителей, размер налогов и т. п. – производитель стремится выбрать тот товар, у которого эти характеристики наиболее приемлемы, т.е. удешевляют производство и увеличивают сбыт, что отражается в функции предложения (9) и ее упрощенном линейном варианте (11).

На действия производителя (фирмы) и потребителя накладываются ограничения, связанные с (9). Введем обозначения:

$X = \{x_{ql},\ q = \overline{1,Q},\ l = \overline{1,L}\}$ – вектор переменных, определяющий объемы продукции, произведенные в q-й фирме и проданные l-му потребителю за некоторый конечный период времени $t \in \boldsymbol{T}$ (время в обозначениях указывать не будем), вектор переменных X совпадает с вектором переменных X в модели потребителя (5)–(8);

c_q – стоимость единицы товара, установленная q-й фирмой на рынке (для всех потребителей одинакова);

$c_q x_{ql}$ – объем денежных средств, полученных q-й фирмой на рынке от l-го потребителя;

$f_q(X) = \sum_{l=1}^{L} c_q x_{ql}$, – величина, которая характеризует объем денежных средств, полученных q-й фирмой на рынке от всех потребителей.

Ресурсные (затратные) характеристики:

$I = \overline{1, M}_q$ – индекс и множество всех видов ресурсов, используемых при производстве продукции q-й фирмой;

$I = \overline{1, M}_{mat}$ – индекс и множество материальных видов ресурсов, которые были использованы при производстве продукции, $M_{mat} \subset M_q$;

a_{iq}, $i = \overline{1, M}_{mat}$ – затраты i-го ресурса на единицу продукции, выпущенного q-й фирмой;

Предполагаем линейную, функциональную зависимость роста затрат от объема выпускаемой продукции:

$$g_i(X)= \sum_{l=1}^{L} a_{iq}x_{ql},\ i=\overline{1,M}_{mat},$$

где $g_i(X)$ – затраты i-го ресурса на весь объем продукции.

Аналогично выполняются расчеты:

- трудовых затрат, приходящихся на единицу какого-либо вида продукции. $i=\overline{1,M}_{tr}$ – индекс и множество трудовых видов ресурсов, которые были использованы при производстве всех видов продукции, $M_{tr}\subset M$;

- прямых затрат, связанных с производственными мощностями на единицу продукции, $M_f\subset M$.

Используя вышеприведенные расчеты, подсчитаем себестоимость единицы произведенной продукции (переменные затраты):

$$a_{qv}=\sum_{i=1}^{M_{mat}} c_i a_{iq}+\sum_{i=1}^{M_{tr}} c_i a_{iq}+\sum_{i=1}^{M_f} c_i a_{qj},\ q=\overline{1,Q},$$

где c_i – стоимость материальных трудовых и ресурсов типа «мощности» соответственно.

По такой схеме рассчитываются и накладные расходы, приходящиеся на единицу изделия – a_{qd}. В целом себестоимость единицы произведенной продукции определяется следующим образом:

$$a_q= a_{qv}+ a_{qd},\ q=\overline{1,Q}. \tag{12}$$

Предполагаем также линейную функциональную зависимость роста затрат в (12) от объема выпускаемого продукта: $\sum_{l=1}^{L} a_q x_{ql},\ q=\overline{1,Q}$.

$$p_q = c_q - a_q - \tag{13}$$

прибыль, получаемая фирмой при производстве единицы продукта, $q=\overline{1,Q}$.

$b_{iq},\ i=\overline{1,M},\ q=\overline{1,Q}$ – величина i-го ресурса, имеющегося на q-й фирме и использующегося при производстве продукта на планируемый период.

$b_q=\sum_{i=1}^{M} c_i b_{iq}$ – финансовые возможности фирмы при производстве продукта, $q=\overline{1,Q}$. Отсюда ограничения, накладываемые на функционирование фирмы при производстве продукта:

$$\sum_{l=1}^{L} a_q x_{ql} \le b_q,\ \forall q\in Q. \tag{14}$$

Цель любого производителя продать как можно больше товара по наиболее высокой цене, чтобы, возможно, получить высокую прибыль[2]. Эту целенаправленность можно представить с учетом целей (13) и ограничений (14) в виде задачи математического программирования:

$$\forall q\in \boldsymbol{Q}\ max\, f_q(X) =\sum_{l=1}^{L} p_q x_{ql}, \tag{15}$$

при ограничениях

[2] Имеется несколько альтернативных моделей поведения фирм: максимизации прибыли, максимизации продаж, максимизации роста, управленческого поведения, максимизации добавленной стоимости (японская модель) [18, 19].

$$c - \sum_{l=1}^{L} a_l x_q = b^s, \qquad (16)$$

$$\sum_{l=1}^{L} a_q x_{ql} \le b_q\ , \forall q \in Q, \qquad (17)$$

$$a_q \le c \le c^{max}, \qquad (18)$$

$$x_{ql} \ge 0,\ q = \overline{1,Q}\ ,\ l = \overline{1,L}\,. \qquad (19)$$

где $f_q(X(t))$ – целевая функция (критерий), $X(t) = \{x_{ql}(\mathrm{t}),\ q = \overline{1,Q}\ ,\ l = \overline{1,L}\}$ – вектор переменных за некоторый конечный период времени $t \in \boldsymbol{T}$;

c, x_{ql}, $\forall q \in Q$ – управляющие переменные, которые представлены в задаче произведением, а отсюда задача оптимизации (15)–(18) – нелинейна, в ней производитель максимизирует свои прибыли за счет изменения стоимости и объема продаж;

(16) – ограничения по предложению на рынке (функция предложения);

(17) – ограничения по ресурсным возможностям q-го производителя;

(18) – стоимость «c» не должна превышать c^{max} – максимальной цены, выше которой ни один покупатель не купит выпускаемую продукцию, т. е. $a_q \le c \le c^{max}$;

(19) – неотрицательность переменных $X(t)$.

Задача (15)–(19) является моделью поведения любого $q \in \boldsymbol{Q}$ производителя на дискретный период $t \in \boldsymbol{T}$. Технологию решения этой задачи с использованием функции предложения покажем далее на тестовом примере.

3. Математическая модель рынка

Рынок – это система экономических взаимоотношений между производителями и потребителями продукции, определяемая свободными ценами на товар в зависимости от спроса и предложения. Эти взаимоотношения определяются разной целенаправленностью участников рынка, что приводит к противоречию – конкуренции между ними.

Конкуренция – процесс взаимодействия, соперничества и борьбы товаропроизводителей за более выгодные условия производства и сбыта товаров и, как следствие, получение прибыли, а также потребителей, стремящихся получить товар по наиболее низкой цене, но с высоким качеством.

Математическая модель рынка должна решать вопросы целенаправленности участников рынка (конкуренции) в совокупности. Для этого объединим математические модели спроса (5)–(8) и предложения (15)–(19). В итоге получим *математическую модель рынка* в виде векторной задачи математического программирования (ВЗМП):

$$opt\ F(X) = \{max\ F_1(X) = \{max\ f_q(X) = \sum_{l=1}^{L} p_q x_{ql},\ q = \overline{1,Q}\,, \qquad (20)$$

$$min\ F_2(X) = \{min\ f_l(X) = \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql},\ l = \overline{1,L}\,\}\}, \qquad (21)$$

$$b^d\text{-}10\%b^d \le \mathrm{c} - \sum_{q=1}^{Q} a_q x_{ql} \le b^d + 10\%b^d, \qquad (22)$$

$$b^s\text{-}10\%b^s \le c - \sum_{l=1}^{L} a_l x_{ql}(\mathrm{t}) \le b^s\text{+}10\%b^s, \qquad (23)$$

$$b_l^{\min} \le \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql} \le b_l^{\max},\ l=\overline{1,L}, \qquad (24)$$

$$\sum_{l=1}^{L} a_q x_{ql} \le b_q,\ q = \overline{1,Q}, \qquad (25)$$

$$a_q \le c \le c^{max},\ x_{ql} \ge 0,\ q=\overline{1,Q},\ l=\overline{1,L}, \qquad (26)$$

где $F(X)$ – векторная целевая функция (векторный критерий), X(t) = {$\mathrm{x_{ql}}$(t), q = $\overline{1,Q}$; l = $\overline{1,L}$} – вектор переменных, определяющий объемы продукта, купленной l-м потребителем у q-го производителя (фирмы); c_q, x_{ql}, $q = \overline{1,Q}$, $l = \overline{1,L}$ – управляющие переменные, которые представлены в задаче произведением, а отсюда задача векторной оптимизации (20)–(26) – нелинейна, в ней $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{L}$ – множество критериев (потребителей и производителей соответственно);

(20) – критерии "$\boldsymbol{Q}$" производителей, максимизирующих свои прибыли, $p_q = (c_q - a_q)$ – прибыль, получаемая при производстве единицы продукции q-м производителем;

(21) – критерии "$\boldsymbol{L}$" потребителей, минимизирующих свои затраты за счет стоимости покупаемой продукции;

(22), (23) – функции спроса и предложения, в которых область ограничений b^d, b^s расширена на 10 %;

(24) – ограничения по бюджетным (финансовым) возможностям "$\boldsymbol{L}$" потребителей;

(25) – ограничения по производственным мощностям "$\boldsymbol{Q}$" производителей;

(26) – ограничения, связанные с неотрицательностью объемов произведенной и проданной продукции.

Задача (24)–(30) представляет собой модель однопродуктового рынка, учитывающую функции спроса и предложения на дискретный период $t \in \boldsymbol{T}$.

Для решения векторной задачи линейного программирования (24)–(30) используются методы, основанные на нормализации критериев и принципе гарантированного результата, которые дают возможность решать задачи при равнозначных критериях и заданном приоритете критерия [14, 12, 15, 19].

В результате решения задачи (20)–(26) – модели продуктового рынка – при равнозначных критериях получим:

- точку оптимума $X^o = \{c^0, x_{ql}^o, q = \overline{1,Q}, l = \overline{1,L}\}$, которая складывается из двух составляющих: x_{ql}^o – объемов продуктов, произведенного и проданного каждым производителем каждому потребителю, c^0 – стоимости, которая удовлетворяет требованиям производителей и потребителей за период времени $t \in \boldsymbol{T}$ (верхний индекс буква “o” – *optimum)*;

- величины целевых функций $f_k(X^o)$, $k = \overline{1,\mathrm{K}}$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{L}$, в том числе $f_q(X^o)$, $q = \overline{1,Q}$, определяют доходы каждого производителя; $f_l(X^o)$, $l = \overline{1,L}$ определяют затраты каждого покупателя;

- суммарный объем продаж всех производителей и финансовых затрат всех потребителей, которые равны между собой:

$$f_{\Sigma q}(X^o) = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{l=1}^{L} (p_{ql} + a_{ql}) x_{ql}^{o} = f_{\Sigma l}(X^o) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{Q} c^{0} x_{ql}^{o}, \qquad (27)$$

т. е. суммарное предложение $f_{\Sigma q}(X^o)$ равно суммарному спросу $f_{\Sigma l}(X^o)$. Заметим, что состояние рынка X^o, при котором спрос равен предложению, называется равновесным, а цена c^0, при которой достигается равенство спроса и предложения, называется равновесной ценой;

- нормализованные величины целевых функций:

$$\lambda_k(X^o) = (f_k(X^o) - f_k^o)/(f_k^* - f_k^o),\ k = \overline{1, \mathrm{K}}, \qquad (28)$$

где f_k^* – наилучшее решение по $k \in \boldsymbol{K}$ критерию, f_k^o – наихудшее соответственно, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{L}$ – множество критериев;

- максимальную относительную оценку λ^o, которая является максимальным нижним уровнем, до которого подняты обоюдные интересы всех производителей и потребителей в относительных оценках $\lambda_k(X^o)$. Другими словами, λ^o является гарантированным результатом в относительных единицах, который гарантирует, что в полученной оптимальной точке X^o все критерии (оценки производителей и потребителей), измеренные в относительных единицах, равны или лучше λ^o:

$$\lambda^o \le \lambda_k(X^o),\ k = \overline{1, \mathrm{K}},\ X^o \in \boldsymbol{S}. \qquad (29)$$

Любое увеличение интересов (критерия) производителя или потребителя приводит к ухудшению положения оставшихся участников рынка (производителей и потребителей).

Вектор-функция $F_1(X) = \{f_q(X^o),\ q = \overline{1, Q}\}$ представляет собой вектор-функцию предложения, а вектор-функция $F_2(X) = \{f_l(X^o), f_l(X^o),\ l = \overline{1, L}\}$ – вектор-функцию спроса. Качество и прочие характеристики товара, учитываемые потребителем, в модели (20)–(26) определяются приоритетом того или иного критерия [12, 15].

Численную реализацию (методологию) решения векторной задачи математического программирования (20)–(26) – модели рынка на основе метода, основанного на нормализации критериев и принципе гарантированного результата, покажем в следующем разделе.

5. Методология моделирования рынка с учетом функции спроса и предложения

Данную методологию проведем в три этапа: постановка задачи, построение модели вида (20)–(26) и непосредственно моделирование и прогнозирование.

Постановка задачи. Покажем ее на тестовом примере.

Дано. Рассматривается оптовый рынок, на котором функционируют два производителя $\boldsymbol{Q}$ = 2 и два потребителя $\boldsymbol{L}$ = 2. Известны статистические данные о покупках (оптовый покупатель) и производстве телевизионных приемников.

Оптовому покупателю телевизионных приемников, бюджет которого ограничен минимальными и максимальными объемами финансовых средств –

$b_l^{\min} = 100000$, $b_l^{\max} = 300000$, $l = \overline{1,2}$ – известны статистические данные о цене и количестве проданных телевизоров за последний месяц в 10 точках розничной торговли города. Объем продаж будем считать переменной величиной, а цену – исходной. Вид статистических данных представлен в табл. 1[3] [17].

Таблица 1

Статистические данные о цене и количестве проданных телевизоров

Показатель	Точка розничной торговли									
Наблюдение	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество (Var 1)	180	590	430	250	275	720	660	490	700	210
Цена (Var 2)	475	400	450	550	575	375	375	450	400	500

Производителей телевизионных приемников опросили на предмет объема производства (количество) при заданной цене. Объем производства приемников будем считать величиной переменной, а цену – исходной (табл. 2).

Таблица 2

Статистические данные о цене и количестве произведенных телевизоров

Показатель	Точка розничной торговли									
Наблюдение	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество (Var 1)	580	560	520	500	480	460	450	440	400	350
Цена (Var 2)	730	560	600	350	590	280	380	400	200	250

На объем производства и соответственно продажи оказывают влияние производственные возможности: $a_1 = a_2 = 400$ – затраты на производство продукта у обоих производителей; $b_1 = b_2 = 150000$ – финансовые возможности фирм при производстве продукта.

Требуется построить оптимизационную модель рынка с учетом функций спроса и предложения, на ее основе провести моделирование и рассчитать прогноз оптимальной цены, объемы спроса–предложения.

Решение

Построение модели рынка с учетом функции спроса и предложения проведем в три этапа:

- построим функцию спроса на основе регрессионного анализа статистических данных табл.1, т. е. построим линию регрессии и определим статистические параметры регрессии;

- построим функцию предложения, используя статистические данные табл. 2, на ее основе построим модель предложения и проведем расчет оптимальной цены и объемов производства;

- построим модель рынка с учетом функции спроса и предложения вида (20)–(26).

Построение функции спроса. Введем статистические данные табл. 1 в электронные таблицы программы *Statistica* [20] и проведем расчет. В результате расчета получим средние значения цены и реализуемого товара, а также

[3] В работу специально включен фрагмент исходных данных из [17] с целью показать переход от классического эконометрического построения функции спроса к оптимизационной модели, а в последующем – к векторной модели.

данные регрессионного анализа, в том числе функцию линейного спроса на телевизоры, при которой минимизируется квадрат погрешностей между множеством фактических точек и линией, проведенной через это множество. Функция спроса представлена уравнением

$$\theta_x^d = 1631{,}47 - 2{,}60c_x. \tag{30}$$

Это уравнение и соответствующие параметры регрессионного анализа показаны на рис. 3.

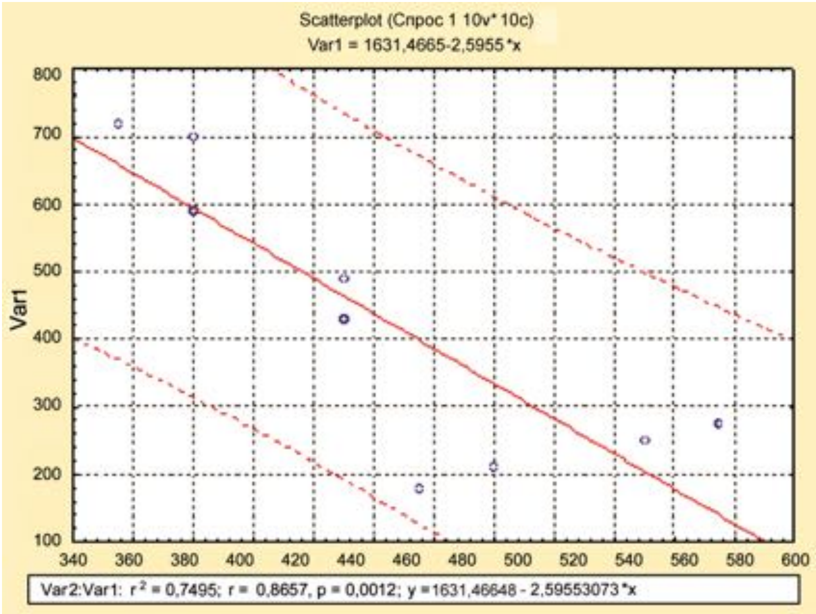

Рис. 3. Функция спроса и параметры регрессионного анализа

Построим оптимизационную задачу (5)–(8) с учетом функции спроса (30). В итоге получим модель потребителя в виде задачи нелинейного программирования:

$$f^*=\min f(X) = cx_1 + cx_2 \tag{31}$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + 2.6c = 1631.47, \tag{32}$$

$$100000 \le cx_1 + cx_2 \le 300000, \tag{33}$$

$$400x_1 \le 150000,\ 400x_2 \le 150000,\ x_1, x_2, c \ge 0, \tag{34}$$

где $X = \{x_1, x_2, c\}$ – вектор неизвестных, определяющий конструктивные параметры рыночного спроса индивидуального потребителя.

Для решения задачи нелинейного программирования (31)–(34) используем алгоритм системы *Matlab* (функция *fmincon* (…)).

В результате получим $X^* = \{x_1 = 31.1, x_2 = 147.9, c = 558.64\}, f^* = 100000$.

Минимальный уровень спроса определяется вторым ограничением $R_2 = 100000$. Точка оптимума соответствует кривой спроса:

$$2.6c + x_1 + x_2 = 2.6*558.6 + 31.1 + 149.1 = 1631.47.$$

Результаты $c = 558.6$ и $\theta_x^d = f(X) = x_1+x_2 = 180.2$ представляют координаты точки функции спроса (рис. 3).

Таким образом, в рассмотренной оптимизационной модели индивидуального потребителя (31)–(34) полученный результат учитывает, с одной стороны, бюджет потребителя, а с другой – соответствует функции спроса. Но вопрос, является ли полученный результат оптимальным для производителя, остается открытым.

Построение функции предложения. Используя статистические данные табл. 2, решение проведем следующим образом: построим функцию предложения, на ее основе построим модель предложения и проведем расчет оптимальной цены и объемов производства. Проведем регрессионный анализ статистических данных табл. 2 и построим функцию предложения, используя для этого пакет программ *Statistica* [20]. В результате расчета получим средние значения цены и объемов реализуемого товара, а также данные регрессионного анализа. Функцией линейного предложения на телевизоры является уравнение

$$\theta_x^s = -566{,}07 + 2{,}11c_x. \qquad (35)$$

Это уравнение и соответствующие параметры регрессионного анализа показаны на рис. 4.

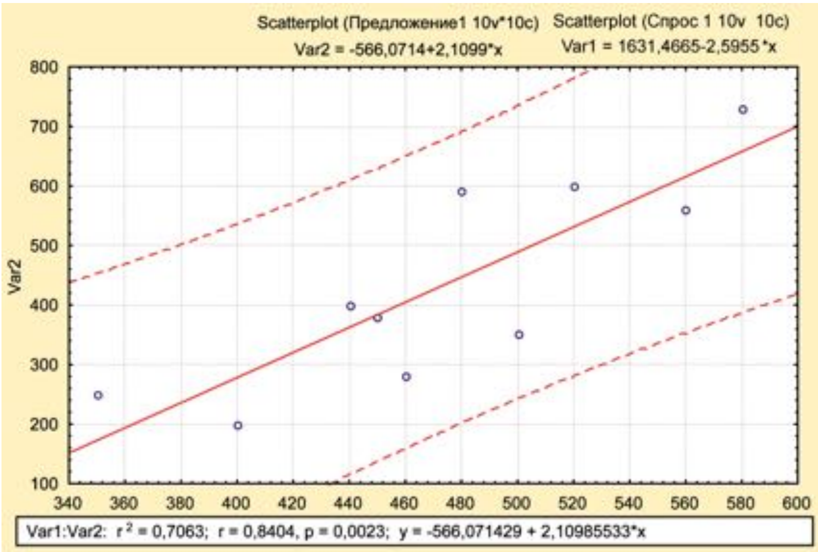

Рис. 4. Функция предложения и параметры регрессионного анализа

Построим модель производителя в виде оптимизационной задачи (15)–(19) с учетом функции предложения (35), в которой $\theta_x^s = x_1 + x_2$, а $c_x = c$. В итоге получим задачу нелинейного программирования:

$$\max f(X) = (c\text{-}400)x_1 + (c\text{-}400)x_2 \qquad (36)$$

при ограничениях

$$-2.11c + x_1 + x_2 = -566.07\,, \qquad (37)$$

$$100000 \le cx_1 + cx_2 \le 300000, \qquad (38)$$

$$400x_1 \le 150000,\ 400x_2 \le 150000,\ a_q \le c \le c^{max},\ x_1, x_2 \ge 0, \qquad (39)$$

где $X = \{c, x_1, x_2\}$ – вектор неизвестных, определяющий цену и конструктивные параметры рыночного спроса–предложения, $c^{max} = 800$.

Для решения задачи нелинейного программирования (36)–(39) используем алгоритм, представленный в системе *Matlab*. В результате решения получим

$$X^* = \{x_1 = 357.8, x_2 = 203.6,\ c = 534.4\}, f^* = 75431.$$

Максимальный уровень производства определяется кривой предложения:

$$x_1 + x_2 \text{-}2.11c = 357.7785\text{+ } 203.6442 \text{ +}2.11\text{*}534.3567\text{=-}566.07.$$

Результаты $\theta^{s}_{x} = x_1 + x_2 = 561.4$ и $c = 534.4$ представляют собой координаты точки функции спроса (рис. 4).

Таким образом, в рассмотренной оптимизационной модели производителя (36)–(39) полученный результат учитывает, с одной стороны, мощности производителя, а с другой – соответствие функции предложения. Но вопрос, является ли полученный результат оптимальным для производителя, остается открытым.

Построение модели рынка выполним с учетом функции спроса (30) и предложения (35), а также целей и ограничений производителей и потребителей в совокупности, т.е. объединим модели (задачи) спроса (31)–(34) и предложения (36)–(39).

Такую целенаправленность всех участников рынка представим в виде векторной задачи математического (нелинейного) программирования:

$$\text{opt}\, F(X) = \{\max f_1(X) = (c\text{-}400)x_1 + (c\text{-}400)x_2, \tag{40}$$

$$\min f_2(X) = cx_1 + cx_2\} \tag{41}$$

при ограничениях

$$1468.33 \le 2.60\text{c} + x_1 + x_2 \le 1794.6, \tag{42}$$

$$\text{-}622.67 \le \text{-}2.11c\text{+}x_1 + x_2 \le \text{-}509.67, \tag{43}$$

$$100000 \le cx_1 + cx_2 \le 300000, \tag{44}$$

$$400x_1 \le 150000,\ 400x_2 \le 150000, \tag{45}$$

$$400 \le c \le 800,\ x_1, x_2 \ge 0, \tag{46}$$

где X = {c, x_1, x_2} – вектор неизвестных, определяющий цену и конструктивные параметры (объем) рыночного спроса–потребления;

(40) – функция, определяющая цель индивидуального производителя;

(41) – функция цели индивидуального потребителя;

(42) – функция спроса, взятая из задачи (31)–(34) и преобразованная к виду (22): b^d-10 %b^d =1631.47-10 %*1631.47=1468.33*,* b^d + 10 %b^d = 1794.6;

(43) – функция предложения, взятая из задачи (36)–(39) и преобразованная к виду (23): b^s-10 %b^s = -566.07-10 %(-566.07) = -622.67, b^s + 10 %b^s = -509.47;

(44) – ограничения по бюджету потребителей и производственным мощностям производителей;

(45) – ограничения, накладываемые на цену и неотрицательность объемов произведенной и проданной продукции.

Векторная задача математического программирования (40)–(46) представляет собой математическую модель рынка и предназначена для моделирования поведения всех участников рынка при условии «что – если». Статистические (регрессионные) модели, например «развитие спроса», дают прогноз, что будущий спрос наиболее вероятен, если потребитель и производитель будут вести себя (принимать решения) так же, как в прошедший период. В отличие от статистических моделей в математической модели рынка можно изменять условия: производственные мощности производителя (45), финансовые возможности потребителя (44); область ограничений b^d, b^s функций спроса и предложения, например, может быть расширена не на 10 %, а на 20 %; и т.д.

Из полученного множества решений лицом, принимающим решения (ЛПР), выбирается единственное, которое и является прогнозом развития рынка.

Моделирование развития рынка (в нашем примере исследование) выполним путем решения двух вариантов векторной задачи (40)–(46) с различными ограничениями: во-первых, когда функции спроса–предложения представлены равенствами, и, во-вторых, когда они представлены неравенствами в виде задачи (40)–(46).

Результаты решения представим на рисунках 5 и 6.

Вариант 1. Функции спроса θ = – 2,60c +1631,47 и предложения θ = 2,11c-566,07 будут представлены равенствами, тогда для определения точки равновесия спроса и предложения достаточно решения системы уравнений:

$$\theta = -2{,}60c + 1631{,}47,$$

$$\theta = 2{,}11c - 566{,}07.$$

Решим их в системе *MatLab:*

[c ,q] = solve('2.60*c + q = 1631.47','-2.11*c + q = -566.07'). (47)

В результате решения получим c = 466,569, q = 418,39 (рис. 5).

Решив равенство (47), получим точку $X_{d=s}$ = {c = 466,569, q = 418,39} (рис. 5).

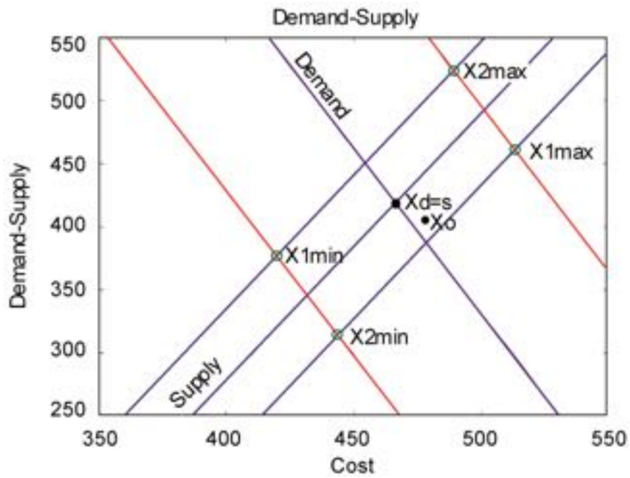

Рис. 5. Функции спроса-предложения и результаты решения задачи

Вариант 2. Для решения векторной задачи (40)–(46) используем метод, основанный на нормализации критериев и принципе гарантированного результата [12, 15], на каждом шаге которого применяется алгоритм решения однокритериальной задачи нелинейного программирования, представленный в системе *MatLab* (функция *fmincon* (…)).

Шаг 1. Решается задача (40)–(46) по каждому критерию отдельно, ищется наилучшее X_k^*, $k = \overline{1, K}$ ($\boldsymbol{K}$ = 2). В результате получим:

X_1^* = {c = 513.2, x_1 = 230.11, x_2 = 230.11} – точка оптимума по первому критерию (производителю), $f_1^* = f_1(X_1^*)$ = -52107;

X_2^* = {c = 443.9, x_1 = 157.03, x_2 = 157.03} – точка оптимума по второму критерию (потребителю), $f_2^* = f_2(X_2^*)$ = 139430 – величина целевой функции в этой точке.

На первом шаге выполняется имитационное моделирование, которое заключается в следующем: сначала предоставляются все ресурсы на выполнение первого критерия – производителя, в результате получаем величину прибыли $f_1^* = 52107$, которую в дальнейшем будем использовать в относительных единицах равной 1 (100 %); затем аналогично предоставляются все ресурсы по второму критерию, $f_2^* = 139430$ – минимальная величина затрат потребителя, которую также принимаем за 1 (100 %). Показатели X_1^*, f_1^* – это монополия для производителя, а X_2^*, f_2^* – монопсония для потребителя. Эти смоделированные показатели берем за цели, к которым стремится каждый участник рынка.

Шаг 2. Решается задача (40)–(46) по каждому критерию отдельно, ищется наихудшее решение (антиоптимум) X_k^o, $k = \overline{1,K}$.

В результате решения получим: $X_1^o = \{c = 419.9,\ x_1 = 188.2,\ x_2 = 188.2\}$, $f_1^o = f_1(X_1^o) = 7512$;

$$X_2^o = \{c = 489.2,\ x_1 = 261.3,\ x_2 = 261.3\},\ f_2^o = f_2(X_2^o) = 255670.$$

На рис. 5 они представлены точками $X1_{max}$, $X1_{min}$, $X2_{min}$, $X2_{max}$ соответственно. Область, ограниченная этими точками, представляет собой область спроса–предложения.

Шаг 3. Проводим системный анализ результатов оптимальных решений, полученных на первом шаге. Выполняем стандартную нормализацию критериев:

$$\lambda_k(X) = (f_k(X) - f_k^o) / (f_k^* - f_k^o),\ k = \overline{1,K}, \qquad (48)$$

где $\lambda_k(X)$, $k = \overline{1,\mathrm{K}}$ – относительная оценка точки $X \in S$ по k-му критерию, f_k^*, $k = \overline{1,K}$ – оптимальное решение по k-му критерию, полученное на первом шаге,

f_k^o, $k = \overline{1,K}$ – наихудшее решение по k-му критерию, полученное на втором шаге:

$$f_k^o = \min_{X \in S} f_k(X),\ \forall k \in K_1, f_k^o = \max_{X \in S} f_k(X),\ \forall k \in K_2;$$

$\forall k \in K$ – относительная оценка $\lambda_k(X)$, $k = \overline{1,\mathrm{K}}$ лежит в пределах $0 \le \lambda_k(X) \le 1$.

$$f_k(X_k^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) = 52110 & f_2(X_1^*) = 236200 \\ f_1(X_2^*) = 13800 & f_2(X_2^*) = 139430 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_k(X_k^*) = \begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) = 1.0 & \lambda_2(X_1^*) = 0.1675 \\ \lambda_1(X_2^*) = 0.141 & \lambda_2(X_2^*) = 1.0 \end{vmatrix}.$$

В точках оптимума нормализованные цели $\lambda_k^* = \lambda_k(X_k^*) = 1$, $\forall k \in K$. При оптимизации к этим точкам должен стремиться каждый участник рынка. На это направлена λ-задача.

Шаг 4. Построение λ-задачи осуществляется в два этапа.

На первом этапе строится максиминная задача:

$$\lambda^o = \max_X \min_{k \in K} \lambda_k(X), \qquad (49)$$

$$G(X) \le B,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,N}.$$

На втором этапе, введя дополнительную переменную $\lambda = \min_{k\in K} \lambda_k(X)$, максиминную задачу (49) преобразуем в однокритериальную λ-задачу:

$$\lambda^o = \max \lambda, \tag{50}$$

$$\lambda - (f_k(X)-f_k^o)/(f_k^*-f_k^o) \le 0,\ k=\overline{1,K},$$

$$G(X) \le B,\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,N}.$$

λ-задача (50) решается стандартными методами.

В нашем примере λ-задача примет следующий вид:

$$\lambda^o = \max \lambda, \tag{51}$$

$$\lambda - \frac{(c\text{-}400)x_1 + (c\text{-}400)x_2 - f_1^o}{f_1^* - f_1^o} \le 0, \tag{52}$$

$$\lambda - \frac{cx_1 + cx_2 - f_2^o}{f_2^* - f_2^o} \le 0, \tag{53}$$

$$1468.33 \le 2.60c + x_1 + x_2 \le 1794.6, \tag{54}$$

$$-622.67 \le -2.11c + x_1 + x_2 \le -509.67, \tag{55}$$

$$100000 \le cx_1+cx_2 \le 300000,\ 400x_1 \le 150000,\ 400x_2 \le 150000,\ x_1, x_2 \ge 0, \tag{56}$$

Шаг 5. Решение λ-задачи.

λ-задача – это стандартная задача нелинейного программирования, и для ее решения используются стандартные методы, например функция *Matlab fmincon* (…).

В результате решения λ-задачи получаем точку оптимума

$X^o = \{c = 477.9,\ x_1 = 202.2,\ x_2 = 202.2\}$ и максимальную относительную оценку $\lambda^o = 0.5373$;

$f_1(X^o) = 31488, f_2(X^o) = 193210$ – величины целевых функций в этой точке;

$\lambda_1(X^o) = 0.5376$, $\lambda_2(X^o) = 0.5373$ – величины относительных оценок в этой точке.

Максимальная относительная оценка λ^o=0.5373 является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda^o = \min(\lambda_k(X^o),\ k = 1,2)$, т. е. гарантированным результатом в относительных единицах, который гарантирует, что в полученной оптимальной точке X^o все критерии равны или лучше λ^o, т. е. выполняются условия

$\lambda_k(X^o) \ge \lambda^o$, $k = 1,2$ или в общем виде:

$$\lambda^o \le \lambda_k(X^o),\ k=\overline{1,K}.$$

Действительно,

$$\lambda_1(X^o) = (f_1(X^o) - f_1^o)/(f_1^* - f_1^o) = 0.5376,\ \lambda_2(X^o) = (f_2(X^o) - f_2^o)/(f_2^* - f_2^o) = 0.5373.$$

Покажем функции, определяющие цели индивидуального производителя (40) и потребителя (41) (рис. 6).

Область спроса-предложения $X1_{max}X2_{min}X1_{min}X2_{max}$ на этом рисунке представлена четырехугольником, который искусственно опущен до λ = -1. Точка X^o, принадлежащая области спроса-предложения, является седловой. В ней, во-первых, спрос равен предложению $\lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o) = 0.5373$, во-вторых, это равенство максимальное.

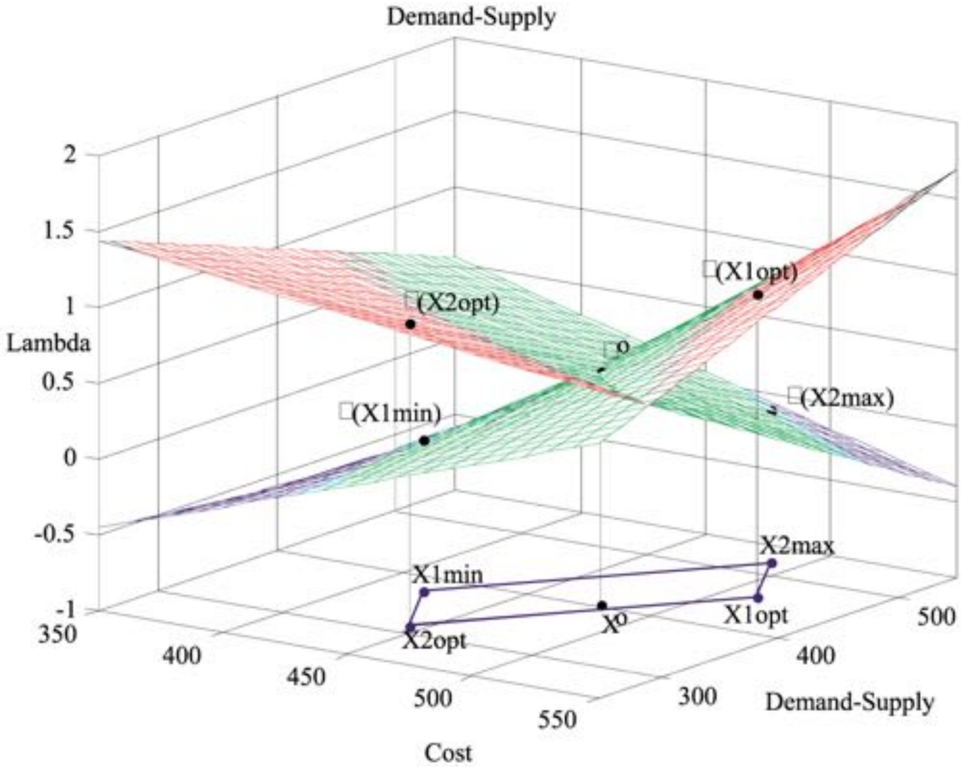

Рис. 6. Целевые функции производителя
и потребителя на области спроса–предложения

В терминах стоимостей финансовые затраты производителей и потребителей также равны между собой:

$f_{\Sigma q}(X) = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{l=1}^{L} (p_{ql}+a_{ql})x_{ql} = f_{\Sigma l}(X) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{Q} c_{ql}x_{ql}$, т. е. предложение равно спросу.

Заключение

В рассмотренной оптимизационной модели рынка (20)–(26) и его числового варианта (40)–(46) полученный результат (равновесная цена и объем спроса–предложения) учитывает, во-первых, цели производителя и потребителя, во-вторых – ограничения, связанные с бюджетом потребителя и возможностями производителя, в-третьих, результат лежит в области, определяемой функциями спроса–предложения. Таким образом, математическая модель рынка, представленная векторной задачей математического программирования (20)–(26), может служить основой для моделирования и прогнозирования развития рынка.

Автор готов использовать разработанное программное обеспечение для решения задач моделирования и прогнозирования развития различных рыночных структур – товарных и отраслевых рынков.

Список источников / References

1. Walras L. Elements d'Economie Politique Pure. Lausanne, 1874. (Elements of Pure Economies, London, 1954).
2. Arrow K. J., Debreu G. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 1954, vol. 22, no. 3, pp. 265–290.
3. McKenzie L.W. On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive market. *Econometrica*, 1954, vol. 22, no. 2, pp. 147–161.
4. Gale D. On optimal development in multi-sector economy. *Rev. Econ. Studies,* 1967, vol. 34, no.1.
5. Nikaido H. Stability of equilibrium by the Brown – von Neumann differential equation. *Econometrica*, 1959, vol. 27, no. 4.
6. Моришима М. *Равновесие, устойчивость, рост (Многоотраслевой анализ).* Москва, Наука, 1972. 280 с. [Morishima M. *Ravnovesie, ustoychivost', rost (Mnogootraslevoy analiz)* [Equilibrium Stability, and Growth: A Multi-Sector Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 280 p.]
7. Nikaido H. Convex structures and economic theory. New York and London, Academic press, 1968.
8. Ланкастер Л. *Математическая экономика*. Москва, Наука, 1972. 280 с. [Lancaster L. *Matematicheskaya economika* [Mathematical economy]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 280 p.]
9. Тироль Жан. *Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности.* Санкт-Петербург, Экономическая школа, 1996. 745 с. [Tyrol Zhan. *Rynki i rynochnaya vlast': Teoriya organizatsii promyshlennosti* [Markets and market power: Theory of industry organization]. St-Petersburg, Economic school Publ.. 1996. 745 p.]
10. Шерер Ф., Росс Д. *Структура отраслевых рынков*. Москва, ИНФРА-М, 1997. 698 с. [Sherer F.A., Ross D. *Struktura otraslevykh rynkov* [Industrial Market Structure]. Moscow, INFRA-M Publ., 1997. 698 p.]
11. Фон Нейманн, Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение*. Москва, Наука, 1970 [von Neumann, Morgenshtern. *Teoriya igr i ekonomicheskoe povedenie* [Theory of games and economic behavior]. Moscow, Nauka Publ., 1970.]
12. Машунин Ю.К. *Теория и моделирование рынка на основе векторной оптимизации*. Москва, Университетская книга, 2010. 352 с. [Mashunin Yu.K. *Teoriya i modelirovanie rynka na osnove vektornoy optimizatsii* [The theory and modeling of the market on the basis of vector optimization of management]. Moscow, University book Publ., 2010. 352 p.]
13. Mashunin Yu.K. and Mashunin I.A. Mathematical model of the Market. *International Journal of Information Technology and Business Management (IJTBM)*, 2014, vol. 25, no. 1, pp. 45–61. Available at: http://www.jitbm. com/jitbm%-2025th%20volume/5%20Marketing%20Model.pdf.
14. Машунин Ю.К. *Методы и модели векторной оптимизации*. Москва, Наука, 1986. 141с. [Mashunin, Yu.K. *Metody I modeli vektornoy optimizatsii* [Methods and models of vector optimization]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 141 p.]
15. Машунин Ю.К. *Теория управления. Математический аппарат управления экономикой.* Москва, Логос, 2013. 448 с. [Mashunin Yu.K. *Teoriya upravleniya. Matematicheskiy apparat upravleniya ekonomikoy* [Management theory. The mathematical apparatus of management of the economy]. Moscow, Logos Publ., 2013. 448 p.]
16. Соколинский В.М., Корольков В.Е. и др. *Экономическая теория*: учеб. пособие. Москва, КНОРУС, 2006. 464 с. [Sokolinsky V.M., Korol'kov V.E. and others. *Ekonomicheskaya teoriya* [Economic theory]. Moscow, KNORUS Publ., 2006. 464.]

17 . Байе М.Р. *Управленческая экономика и стратегия бизнеса*. Москва, ЮНИТИ-ДАНА, 1999. 743 с. [Baye M.R. *Upravlencheskaya ekonomika i strategiya biznesa* [Managerial Economics and Business Strategy]. Moscow, UNITI-DANA, Publ., 1999. 743 c.]
18. Сио Л.К. *Управленческая экономика*: пер. с англ. Москва, ИНФРА-М, 2000. 671 с. [Sio K.K. *Upravlencheskaya ekonomika* [Managerial Economics]. Moscow, INFRA-M Publ., 2000. 671 p.]
19. Машунин Ю.К. Моделирование и прогнозирование развития фирмы на базе векторной оптимизации (1. Постановка проблемы). *Известия ДВФУ. Экономика и управление*, 2016, № 1, сс. 17–36. [Machunin Yu. K. Modelirovanie i prognozirovanie razvitia firmy na baze vektornoy optimizatsii (1. Postanovka problemy) [Modeling and forecasting of development of firm on the basis of vector optimization (1. Statement of a problem)]. *Izvestia DVFU. Ekonomika I upravlenie – FEFU news. Economy and management*, 2016, no. 1, pp. 17–36.]
20. Вуколов Э.Н. *Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов Statistica и Excel*: учеб. пособие. Москва, Форум: Инфра-М, 2004. 464 с. [Vukolov E.N. *Osnovy statisticheskogo analiza. Praktikum po statisticheskim metodam i issledovaniyu operatsiy s ispol'zovaniem paketov Statistica i Excel* [Fundamentals of statistical analysis. Workshop on statistical methods and operations research using the packages Statistica and Excel]. Moscow, Forum: Infra-M Publ., 2004. 464 p.]

Сведения об авторе /About author

Машунин Юрий Константинович, кандидат технических наук, доктор экономических наук, доцент, профессор кафедры «Государственное и муниципальное управление», Школа экономики и менеджмента Дальневосточного федерального университета. 690920 г. Владивосток, о-в Русский, кампус ДВФУ, корп. G, ауд. 525. *E-mail: mashunin@mail.ru.*

Yuriy K. Mashunin, Candidate of Engineering Science, Doctor of Economic Sciences, Associate Professor. Far Eastern Federal University, School of Economics and Management, Department «State and municipal management», Professor. Bldg. G Ajax Street, 525 Office, 690920, Vladivostok. *E-mail: mashunin@mail.ru.*

Адрес сайта в сети интернет: http://jem.dvfu.ru