Теория, математическое моделирование и прогнозирование развития рынка (2. Структура рынка)

Юрий Машунин[1,*]

[1] Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

Информация о статье

Поступила в редакцию:
19.12.2016
Принята к опубликованию:
10.07.2017

УДК 51-77
JEL C 61

Ключевые слова:
рынок, спрос, предложение, модель рынка, векторная оптимизация, моделирование, прогнозирование, принятие решений.

Keywords:
Market, Demand and supply, Market model, Vector optimization, Simulation, Forecasting, Decision making.

Аннотация

Представлена методология моделирования исследования структуры рынка, на основе раннее опубликованной математической модели в виде векторной задачей математического программирования. Показана модель рынка, которая построена таким образом, что учитывает, во-первых, целенаправленность каждого производителя, во-вторых, целенаправленность каждого потребителя. Базовая модель рынка представлена векторной задачей с четырьмя критериями, которые отражают цели двух производителей и двух потребителей. Методология принятия оптимального решения показана на решении численной векторной задачи линейного программирования – модели рынка совершенной конкуренции с двумя производителями и двумя потребителями. При исследовании структуры рынка совершенной конкуренции показана социальная направленность участников рынка – как производителей, так и потребителей.

Theory, mathematical modeling and forecasting of market development (2. Structure of the market)

Yuriy Mashunin

Abstract

The methodology of modeling the market structure research is presented on the basis of the earlier published mathematical model in the form of a vector problem of mathematical programming. The market model is shown, which is constructed in such a way that it takes into account, firstly, the purposefulness of each producer, and secondly, the pur-posefulness of each consumer. The basic market model is represented by a vector problem with four criteria that reflect the objectives of the two producers and two consumers. The methodology of making the optimal decision is shown in the solution of the numerical vector problem of linear programming – the model of the market of perfect competition with two producers and two consumers.

**Автор для связи*: *E-mail: mashunin@mail.ru.*
DOI: dx.doi.org/10.24866/2311-2271/2017-3/3-21

When studying the structure of the market of perfect competition, the social orientation of the market participants – both producers and consumers – is shown.

Введение

Одной из важнейших проблем эконометрики является проблема построения модели рынка, исследования его структуры, моделирования и, как следствие, принятия оптимальных решений по его развитию. В предыдущей работе [1] была представлена и исследована модель рынка с одним продуктом, в основе которой установлен баланс между спросом и предложением, отраженный функциями спроса, предложения. Этим вопросам построения модели рынка уделяется достаточно большое внимание в развитых странах мира [2–12]. Большинство моделей рынка строилось по принципу установления конкурентного равновесия, т.е. баланса совокупного предложения и спроса [7]. Но в этих агрегированных моделях рынка отсутствовала конкуренция как между производителями и потребителями, а также не отражена целенаправленность действий участников рынка (производителей и потребителей), которая и является основой конкуренции. Модель рынка должна отражать не только баланс между предложением и спросом, но и целенаправленность каждого участника рынка с учетом их общей взаимосвязи. Такой математической моделью, которая наряду с балансом может отразить целенаправленность каждого участника рынка, является векторная (многокритериальная) задача математического программирования [13–17].

Цель данной работы состоит в построении модели рынка, в которой отражена целенаправленность каждого производителя (фирмы) и каждого потребителя. На базе такой модели исследована структура рынка. Решена численная задача моделирования рынка совершенной конкуренции.

Для достижения поставленной цели построены математическая модель производителя (фирмы) [17] и модель потребителя. Путем объединения математических моделей всех производителей и всех потребителей предложений рынка построена математическая модель рынка в виде векторной задачи математического программирования (ВЗМП), которая решает вопросы целенаправленности участников рынка (конкуренции) в совокупности.

Построена базовая модель рынка, которая включает двух производителей и двух потребителей, на основе которой исследована структура рынка. Решение ВЗМП основано на нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Методология моделирования рынка представлена на числовом примере рынка совершенной конкуренции.

1. Модель рынка, определяющая целенаправленность всех производителей и всех потребителей

Рынок представляет собой систему экономических взаимоотношений между производителями продукции и потребителями, определяемую свободными ценами на товар в зависимости от спроса и предложения [13–14] (рис. 1).

Первая подсистема рынка представлена Q производителями: $q = \overline{1,Q}$, где Q – число, q – индекс, а $\boldsymbol{Q}$ – множество индексов производителей (фирм), $\boldsymbol{Q} \equiv \overline{1,Q}$; вторая подсистема представлена L потребителями продукта отрасли:

$l = \overline{1,L}$, где l – индекс, L – число, $\boldsymbol{L}$ – множество потребителей; третья подсистема связующая – товар.

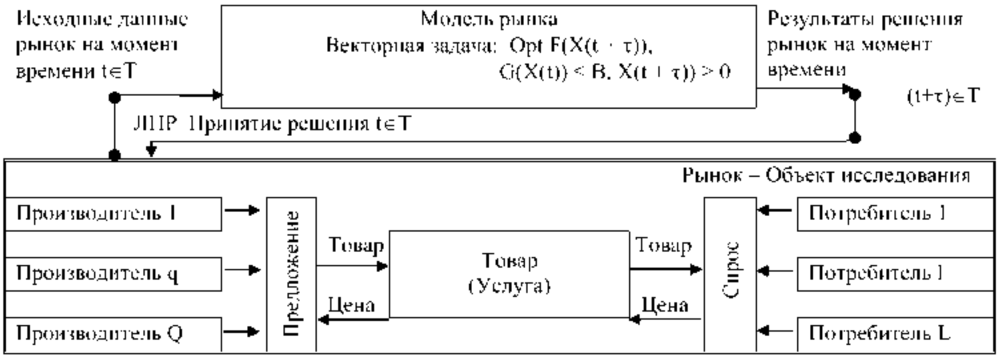

Рис. 1. Схема рынка и взаимосвязь с моделью

Цель любого производителя продать как можно больше товара по наиболее возможно высокой цене с тем, чтобы получить, возможно высокую прибыль. Такую целенаправленность производителя представим в виде задачи линейного программирования:

$$\forall q \in Q \max f_q(X) = \sum_{l=1}^{L} p_q x_{ql} \tag{1}$$

при ограничениях
$$\sum_{l=1}^{L} a_q x_{q\,l} \le b_q, \ \forall q \in Q, \tag{2}$$

$$x_{ql} \ge 0,\ q = \overline{1,Q},\ l = \overline{1,L}, \tag{3}$$

где $X = \{x_{ql},\ q = \overline{1,Q},\ l = \overline{1,L}\}$ – вектор переменных, определяющий объемы продукции, произведенные в q-й фирме и проданные l-му потребителю за некоторый конечный период времени $t \in T$, (время указывать не будем);

c_q – стоимость единицы товара, установленная q-й фирмой на рынке (для всех потребителей одинакова); $c_q x_{ql}$ – объем денежных средств, полученных q-й фирмой на рынке от l-го потребителя; $f_q(X) = \sum_{l=1}^{L} c_q x_{ql}$, – величина, которая характеризует объем денежных средств, полученных q-й фирмой на рынке от всех потребителей;

i **=** $\overline{1,M}$ ***– индекс и множество M всех видов ресурсов, которые используются при производстве продукции q-й фирмой;***

a_{iq}, $i = \overline{1,M}_{mat}$ – затраты i-го ресурса на единицу продукции, выпущенной q-й фирмой, $M_{mat} \subset \boldsymbol{M}$; аналогично трудовые затраты, приходящиеся на единицу какого-либо вида продукции, $i = \overline{1,M}_{tr}$, $M_{tr} \subset \boldsymbol{M}$; прямые затраты, связанные с производственными мощностями на единицу продукции, $M_f \subset \boldsymbol{M}$;

производственная себестоимость единицы произведенной продукции (переменные затраты): $a_{qv} = \sum_{i=1}^{M_{mat}} c_i a_{iq} + \sum_{i=1}^{M_{tr}} c_i a_{iq} + \sum_{i=1}^{M_f} c_i a_{qj}$, $q = \overline{1,Q}$ –

где c_i – стоимость материальных трудовых ресурсов и мощностей;

себестоимость единицы произведенной продукции $a_q = a_{qv} + a_{qd}$, $q = \overline{1,Q}$, где a_{qd} стоимость постоянных затрат, приходящаяся на единицу продукции;

предполагаемая линейная функциональная зависимость роста затрат от объема выпускаемого продукта: $\sum_{l=1}^{L} a_q x_{ql}$, $q = \overline{1,Q}$.

$p_q = c_q - a_q$ – прибыль, получаемая фирмой при производстве единицы продукта, $q = \overline{1,Q}$.

b_{iq}, $i = \overline{1,M}$, $q = \overline{1,Q}$ – величина i-го ресурса, имеющегося на q-й фирме и использующегося при производстве продукта; $b_q = \sum_{i=1}^{M} c_i b_{iq}$ – финансовые возможности фирмы при производстве продукта, $q = \overline{1,Q}$.

Заметим, что модель производителя (1)–(3) является линейным отображением функции предложения на товар "x" [1]:

$$\theta_x^s = f(c_x, c_w, p_r, h_x), \tag{4}$$

где θ_x^s – количество требуемого товара "x"; c_x – цена этого товара; c_w – цена исходных ресурсов, необходимых для производства (например, цена на сырьё, заработную плату основных производственных рабочих и т. д.); p_r – цена технологически однородных товаров; h_x – значение любой другой переменной, влияющей на предложение товара на рынке. Функциональная зависимость θ_x^s может быть как линейной, так и нелинейной [11].

Цель любого потребителя купить необходимый объем товара по максимально низкой цене и с наиболее высоким суммарным качеством. Это можно описать в виде задачи математического (линейного) программирования (ЗЛП):

$$\forall l \in L \min f_l(X) = \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql} \tag{5}$$

при ограничениях

$$b_l^{\min} \le \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql} \le b_l^{\max}, \; l = \overline{1,L}, \tag{6}$$

$$x_{ql} \ge 0, \; q = \overline{1,Q}, \; l = \overline{1,L}, \tag{7}$$

где $X = \{x_{ql}, \; q = \overline{1,Q}, \; l = \overline{1,L}\}$ – вектор переменных, определяющий объемы продукции, купленные l-м потребителем у q-го производителя (фирмы); он по своей величине совпадает с вектором переменных, определяющим действия производителя;

$b_l^{\min}$, $b_l^{\max}$, $l = \overline{1,L}$ – минимальный и максимальный объемы финансовых средств, которые потребитель может выделить на покупку продукта от различных фирм.

При покупке продукта главными мотивами, побуждающими потребителя – "покупать–не покупать" являются: величина цены c_q, установленная q-м производителем – потребитель стремится выбрать тот товар, у которого c_q, $\forall q \in Q$ как можно меньше; набор характеристик товара: качество, место расположения продажи, время доступа, реклама и д.р.

Заметим, что модель потребителя (5)–(7) является линейным отображением функции спроса на товар "*x*" [1]:

$$\theta_x^d = f(c_x, c_y, b_x, h_x),$$

где θ_x^d – количество приобретенного товара "*x*", c_x – цена этого товара, c_y – цена взаимозаменяющего товара, b_x – доход (бюджетные ограничения), h_x – значение любой другой переменной, влияющей на спрос (затраты на рекламу, численность населения, качество продукции, транспортные расходы и другие потребительские ожидания) [11].

При увеличении количества факторов в (8) оптимизационная задача (5)–(7) становится нелинейной задачей математического программирования.

Математическая модель рынка по своему функциональному назначению должна отражать целенаправленность участников рынка в совокупности. Для этого объединим множество $\boldsymbol{Q}$ – математические модели всех производителей (1)–(3) и множество $\boldsymbol{L}$ модели всех потребителей (5)–(7), $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{L}$. В итоге получим *математическую модель рынка* в виде векторной задачи математического программирования (ВЗМП):

$$optF(X) = \{maxF_1(X) = \{maxf_q(X) = \sum_{l=1}^{L} p_q x_{ql},\ q = \overline{1,Q}, \tag{8}$$

$$minF_2(X) = \{minf_l(X) = \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql},\ l = \overline{1,L}\}, \tag{9}$$

$$maxf_{\Sigma q}(X^o) = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{l=1}^{L} p_{ql} x_{ql}, \tag{10}$$

$$minf_{\Sigma l}(X^o) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql}\}, \tag{11}$$

$$b_l^{\min} \le \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql} \le b_l^{\max},\ l = \overline{1,L}, \tag{12}$$

$$\sum_{l=1}^{L} a_q x_{ql} \le b_q,\ q = \overline{1,Q}, \tag{13}$$

$$a_q \le c \le c^{max},\ x_{ql} \ge 0,\ q = \overline{1,Q},\ l = \overline{1,L}, \tag{14}$$

где $F(X)$ – векторная целевая функция (векторный критерий), $X(t) = \{x_{ql}(t),\ q = \overline{1,Q};\ l = \overline{1,L}\}$ – вектор переменных, определяющий объемы продукта, купленные l-м потребителем у q-го производителя (фирмы);

(8) – критерии "$\boldsymbol{Q}$" производителей, максимизирующих свои прибыли, $p_q = (c_q - a_q)$ – прибыль, получаемая при производстве единицы продукции q-м производителем; (9) – критерии "$\boldsymbol{L}$" потребителей, минимизирующих свои затраты за счет стоимости покупаемой продукции;

(10), (11) – системные критерии, определяющие совокупное предложение и спрос соответственно;

c_q, x_{ql}, $q = \overline{1,Q}$, $l = \overline{1,L}$ – управляющие переменные, которые представлены в задаче произведением; если c_q лежит в пределах (14), задача векторной оптимизации (8)–(14) нелинейна, если c_q – const, задача векторной оптимизации (8)–(14) линейна;

(12) – ограничения по бюджетным (финансовым) возможностям "***L***" потребителей;

(13) – ограничения по производственным мощностям "***Q***" производителей;

(14) – ограничения, связанные с неотрицательностью объемов произведенной и проданной продукции.

Задача (8)–(14) представляет собой модель однопродуктового рынка, учитывающую целенаправленность всех участников рынка на дискретный период $t\in\boldsymbol{T}$. Для решения векторной задачи линейного программирования (8)–(14) используются методы, основанные на нормализации критериев и принципе гарантированного результата, которые дают возможность решать задачи при равнозначных критериях и заданном приоритете критерия [13, 14].

В результате решения векторной задачи линейного программирования (8)–(14) – модели продуктового рынка – получим:

точку оптимума $X^o = \{ x^o_{ql}, q = \overline{1,Q}, l = \overline{1,L} \}$ – объемов продуктов, произведенных и проданных каждым производителем каждому потребителю за период времени $t\in\boldsymbol{T}$ (верхний индекс “o”– *optimum)*;

величины целевых функций $f_k(X^o)$, $k = \overline{1,K}$, $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Q}\cup\boldsymbol{L}$, в том числе $f_q(X^o)$, $q = \overline{1,Q}$, определяют доходы каждого производителя; $f_l(X^o)$, $l = \overline{1,L}$ определяют затраты каждого покупателя;

суммарный объем продаж всех производителей и финансовых затрат всех потребителей, которые равны между собой:

$$f_{\Sigma q}(X^o) = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{l=1}^{L} (p_{ql}+a_{ql})x^o_{ql} = f_{\Sigma l}(X^o) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{Q} c^0 x^o_{ql}, \qquad (15)$$

суммарное предложение $f_{\Sigma q}(X^o)$, равное суммарному спросу $f_{\Sigma l}(X^o)$. Заметим, что состояние рынка – X^o, при котором спрос равен предложению, называется равновесным, а цена – c^0, при которой достигается равенство спроса и предложения, называется равновесной ценой;

- нормализованные величины целевых функций:

$$\lambda_k(X^o) = (f_k(X^o)-f^o_k)/(f^*_k - f^o_k), k = \overline{1,K}, \qquad (16)$$

где f^*_k – наилучшее решение по $k\in\boldsymbol{K}$ критерию, f^o_k – наихудшее соответственно, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}\cup\boldsymbol{L}$ – множество критериев;

- максимальную относительную оценку λ^o, которая является максимальным нижним уровнем, до которого подняты обоюдные интересы всех производителей и потребителей в относительных оценках $\lambda_k(X^o)$. Другими словами, λ^o является гарантированным результатом в относительных единицах. λ^o гарантирует, что в полученной оптимальной точке X^o все критерии (оценки производителей и потребителей), измеренные в относительных единицах, равны или лучше λ^o:

$$\lambda^o \le \lambda_k(X^o), k = \overline{1,K}, X^o\in\boldsymbol{S}. \qquad (17)$$

Любое увеличение интересов (критерия) производителя или потребителя приводит к ухудшению положения оставшихся участников рынка (производителей и потребителей).

Вектор-функция

$$F_1(X) = \{f_q(X^o), q = \overline{1,Q}\} \quad (18)$$

представляет собой вектор-функцию предложения, а вектор-функция

$$F_2(X) = \{f_l(X^o), f_l(X^o), l = \overline{1,L}\} - \quad (19)$$

вектор-функцию спроса.

Векторная задача математического программирования (8)–(14) представляет собой математическую модель рынка и предназначена для моделирования поведения всех участников рынка при условии «что – если». Статистические (регрессионные) модели, например «развитие спроса» [1], дают прогноз, что будущий спрос наиболее вероятен, если потребитель и производитель будут вести себя (принимать решения) так же, как в прошедший период. В отличие от статистических моделей в математической модели рынка можно изменять условия: производственные мощности производителя (13), финансовые возможности потребителя (12) и т.д. Из полученного множества решений лицом, принимающим решения (ЛПР), выбирается единственное, которое и является прогнозом развития рынка.

2. Математическое моделирование рыночных структур

Под ***структурой рынка*** понимают совокупность элементов, определяющих функционирование рынка. Сюда входят: число компаний, действующих на рынке и конкурирующих друг с другом, относительный размер этих компаний (концентрация), технологические и стоимостные показатели, условия спроса, условия предложения, а также степень открытости рынка для появления на нем новых компаний или ухода с него прежних участников [13].

Понятие структуры рынка дает возможность оценить объемы спроса-предложения и определить линию поведения компании или потребителя продукции на некоторый период времени.

Структура рынка зависит от ряда структурных характеристик, факторов, величина и значение которых во многом определяют управленческие решения. К ним относятся: размеры компаний; численность продавцов, действующих на данном товарном рынке; доли, занимаемые продавцами на данном товарном рынке; концентрация в отрасли, технология, условия спроса и прочие рыночные условия. В соответствии с изменениями перечисленных выше факторов, рыночные структуры подразделяются на структуры с совершенной и несовершенной конкуренцией.

Для анализа сформулированных рыночных структур рассмотрим математическую модель (8)–(14) для наиболее простой ситуации, когда на рынке с одним товаром действуют два производителя и два потребителя этого продукта. К такой модели наиболее близки модели-дуополии Курно, Штакельберга, Бертрана и Эджуорта [11, 12], в которых рассмотрены взаимоотношения только двух производителей (фирм). Такую модель назовем базовой.

Построение базовой математической модели рынка.

Рассматривается рынок с одним товаром, в котором участвуют два производителя и два потребителя этого продукта.

Введем обозначения:

x_1, x_2 – объемы продукта0 проданные первым производителем, x_3, x_4– вторым производителем первому и второму потребителю соответственно;

c_1, c_2, c_3, c_4 – фиксированные цены на продукт, позволяющие рассматривать задачу (8)–(14) как линейную;

a_1, a_2, a_3, a_4 – затраты на производство продукта у обоих производителей;

$p_i = c_i\text{-}a_i$ – прибыль от производства и продажи продукта у обоих производителей $i = 1,...,4$;

$b_l^{\min}$, $b_l^{\max}$, $l = 1{,}2$ – минимальный и максимальный объемы финансовых средств, которые могут выделить на покупку продукта от разных фирм первый и второй потребители.

b_q – финансовые возможности фирмы при производстве продукта, $q = 1{,}2$.

Базовую математическую модель рынка с двумя производителя и двумя потребителями (модель 2*2) в линейной постановке (т. е. цены на некоторый период времени постоянны) с учетом введенных обозначений представим в виде векторной задачи линейного программирования:

$$\text{opt } F(X) = \{\max f_1(X) = p_1x_1 + p_2x_2,\ \max f_2(X) = p_3x_3 + p_4x_4, \tag{20}$$

$$\min f_3(X) = c_1x_1 + c_3x_3,\ \min f_4(X) = c_2x_2 + c_4x_4\} \tag{21}$$

при ограничениях $$b_1^{\min} \le c_1x_1 + c_3x_3 \le b_1^{\max},\ b_2^{\min} \le c_2x_2 + c_4x_4 \le b_2^{\max}, \tag{22}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 \le b_1, \qquad a_3x_3 + a_4x_4 \le b_2, \tag{23}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \tag{24}$$

Математическая модель рынка (20)–(24) может использоваться для различных рыночных структур путем изменения соответствующих параметров, поэтому она названа базовой. Аналогично могут быть построены базовые модели большей размерности.

Для решения векторной задачи (20)–(24) используем алгоритмы, основанные на нормализации критериев и принципе гарантированного результата. В модели такого рынка в зависимости от изменения параметров модели – цены на товар и ресурсные затраты – рассматриваются:

а) модель с одинаковыми параметрами, что соответствует *модели совершенной конкуренции*;

б) *модель олигополии*, в которой параметры могут изменяться, т. е. у некоторых фирм имеется возможность доминирования над другими фирмами по ценам, ресурсам и прочим параметрам;

в) *модель монополии*, в которой имеется один критерий (20) – производители, и множество критериев (21) – потребители (в нашем примере два);

г) *модель монопсонии*, в которой имеется и множество критериев (20) – производители и один критерий (21) – потребитель.

Построение и исследование структуры рынка на основе численной модели совершенной конкуренции.

Введем обозначения, уточняющие модель (20)–(24):

$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 50$ – цены на продукт; $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 40$ – затраты;

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = (c_1\text{-}a_1) = 10$ – прибыль от производства-продажи продукта;

$b_l^{\min} = 3500$, $b_l^{\max} = 5000$, $l = 1{,}2$; $b_q = 5000$, $q = 1{,}2$.

Связь спроса и предложения решена следующим образом.

Спрос определяется: а) максимальной суммой, которую могут выделить потребители для своей покупки:

$x_1^{\max} + x_2^{\max} = 200$, где $x_1^{\max} = x_2^{\max} = b_1^{\max}/c_1 = b_2^{\max}/c_2 = 100$ единиц продукта,

$c_q(x_1^{\max} + x_2^{\max}) = 10000$ – ее стоимость;

б) минимальной суммой, которая необходима для наименьшего потребления продукта:

$x_1^{\min} + x_2^{\min} = 140$, где $x_1^{\min} = x_2^{\min} = b_1^{\min}/c_1 = b_2^{\min}/c_2 = 70$ единиц продукта

$c_q(x_1^{\max} + x_2^{\max}) = 7000$ – ее стоимость.

Предложение вытекает из того, что каждая фирма может изготовить не более $x_q^{\max} = b_q/a_q = 125$, $q = 1,2$ единиц товара и с учетом стоимости $c_q x_q^{\max} = 6250$. Это, с одной стороны, несколько больше, чем минимальная потребность одного потребителя, но меньше минимальной суммы потребностей обоих потребителей, т. е. $3500 = b_q^{\min} \le c_q x_q^{\max} \le c_q(x_1^{\min} + x_2^{\min}) = 7000$, а с другой стороны, сумма $x_1^{\max} + x_2^{\max} = 250$ и ее стоимость $c_q(x_1^{\max} + x_2^{\max}) = 7500$ превышают максимальные потребности финансовых средств, которые могут выделить на покупку продукта от разных фирм оба потребителя.

Следовательно, в модели (20)–(24) с установленными числовыми параметрами, предложение превышает спрос, хотя модель может быть использована и при других взаимоотношениях спроса и предложения.

Математическая модель рынка с двумя производителями и двумя потребителями (*модель 2*2*) введенными параметрами представим в виде векторной задачи линейного программирования:

$$\text{opt } F(X)=\{\max f_1(X) = 10x_1 + 10x_2,\ \max f_2(X) = 10x_3 + 10x_4, \tag{25}$$

$$\min f_3(X) = 50x_1 + 50x_3,\ \min f_4(X) = 50x_2 + 50x_4\} \tag{26}$$

при ограничениях $$3500 \le 50x_1 + 50x_3 \le 5000,\ 3500 \le 50x_2 + 50x_4 \le 5000, \tag{27}$$

$$40x_1 + 40x_2 \le 5000, \qquad 40x_3 + 40x_4 \le 5000, \tag{28}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \tag{29}$$

Для решения векторной задачи (25)–(29) используются методы, основанные на нормализации критериев и принципе гарантированного результата [15, 16]. Эти методы будут использоваться при решении векторной задачи линейного программирования (25)–(29) с равнозначными критериями.

Исследование модели совершенной конкуренции, представленной в виде векторной задачи (25)–(29), проведем для трех вариантов:

а) моделирование поведения с учетом целенаправленности всех производителей и потребителей (четыре критерия – задача (25)–(29)).

б) моделирование поведения только производителей (без учета целенаправленности потребителей, т. е. используются два критерия (25), (27)–(29));

в) моделирование поведения только потребителей с использованием двух критериев (6.4.2) и ограничений (27)–(29).

Моделирование поведения с учетом целенаправленности всех производителей и потребителей

Решение векторной задачи – модели рынка с четырьмя равнозначными критериями представим задачей (25)–(29). Экономическая сущность решения векторной задачи (25)–(29) состоит в том, что в модели рынка все цели как производителей, так и потребителей уравниваются в виде относительных оценок при совместной оптимизации.

Решение векторной задачи (25)–(29) при равнозначных критериях на основе нормализации критериев и принципе гарантированного результата согласно [15, 16] представим в виде последовательности шагов.

Шаг 1. Решается задача (25) –(29) по каждому критерию отдельно, ищется наилучшее $X_k^* = \{x_j,\ j = \overline{1,N}\}$, $k = \overline{1,K}$, $f_k^* = f_k(X_k^*)$, $k = \overline{1,K}$, ($\boldsymbol{K} = 4$).

В результате получим:

по 1-му критерию $X_1^* = \{x_1 = 62.5,\ x_2 = 62.5,\ x_3 = 37.5,\ x_4 = 37.5\}$ – точка оптимума (производитель), $f_1^* = f_1(X_1^*) = 1250.0$;

по 2-му критерию $X_2^* = \{x_1 = 37.5,\ x_2 = 37.5,\ x_3 = 62.5,\ x_4 = 62.\ 5\}$ – точка оптимума (производитель), $f_2^* = f_2(X_2^*) = 1250.0$ – величина целевой функции в этой точке;

по 3-му критерию $X_3^* = \{x_1 = 35.0,\ x_2 = 50.0,\ x_3 = 35.0,\ x_4 = 50.0\}$ – точка оптимума (потребитель), $f_3^* = f_3(X_3^*) = 3.5000$ – величина целевой функции в этой точке;

по 4-му критерию $X_4^* = \{x_1 = 50.0,\ x_2 = 35.0,\ x_3 = 50.0,\ x_4 = 35.0\}$ – точка оптимума (потребител), $f_4^* = f_4(X_4^*) = 3.5000$ – величина целевой функции в этой точке.

На первом шаге выполняется имитационное моделирование. Сначала предоставляются все ресурсы для выполнения цели первого производителя (критерий 1). В результате решения получаем величину прибыли $f_1^* = 1250.0$, которую в дальнейшем будем использовать в относительных единицах равной 1 (100 %). Аналогично предоставляются все ресурсы для выполнения цели второго производителя (критерий 2), затем цели первого потребителя (минимум величины затрат), которую также принимаем за 1 (100 %). Показатели X_1^*, f_1^* – это монополия для первого (X_2^*, f_2^* для второго) производителя, а X_3^*, f_3^* – монопсония для первого (X_4^*, f_4^* для второго) потребителя. Эти смоделированные показатели берем за цели, к которым стремится каждый участник рынка.

Покажем точки оптимума X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^* соответственно в агрегированной системе координат x_1, x_2. Область, ограниченная этими точками, является областью множества точек, оптимальных по Парето (рис. 2).

Шаг 2. Решается задача (25)–(29) по каждому критерию отдельно, ищется наихудшее решение (антиоптимум): $X_k^o = \{x_j, j = \overline{1,N}\}$, $f_k^o = f_k(X_k^o)$, $k = \overline{1,K}$.

В результате решения задачи (25)–(29)получим:

$X_1^o = \{x_1 = 7.5,\ x_2 = 7.5,\ x_3 = 62.5,\ x_4 = 62.5\}$, $f_1(X_1^o) = 150.0$ ($X1_{min}$)

$X_2^o = \{x_1 = 62.5,\ x_2 = 62.5,\ x_3 = 7.5,\ x_4 = 7.5\}$, $f_2(X_2^o) = 150.0$ ($X2_{min}$)

$X_3^o = \{x_1 = 50.0,\ x_2 = 50.0,\ x_3 = 50.0,\ x_4 = 50.0\}$, $f_3(X_3^o) = 1000$ ($X3_{max}$)

$X_4^o = \{x_1 = 50.0,\ x_2 = 50.0,\ x_3 = 50.0,\ x_4 = 50.0\}$, $f_4(X_4^o) = 1000.0$ ($X4_{max}$)

Шаг 3. Проводим системный анализ результатов оптимальных решений, полученных на первом шаге: $X_k^* = \{x_j,\ j = \overline{1,4}\}$, $k = \overline{1,4}$. Определяем величины критериев в натуральных единицах: $F = \{f_q(X_k^*),\ k = \overline{1,K},\ q = \overline{1,K}\}$.

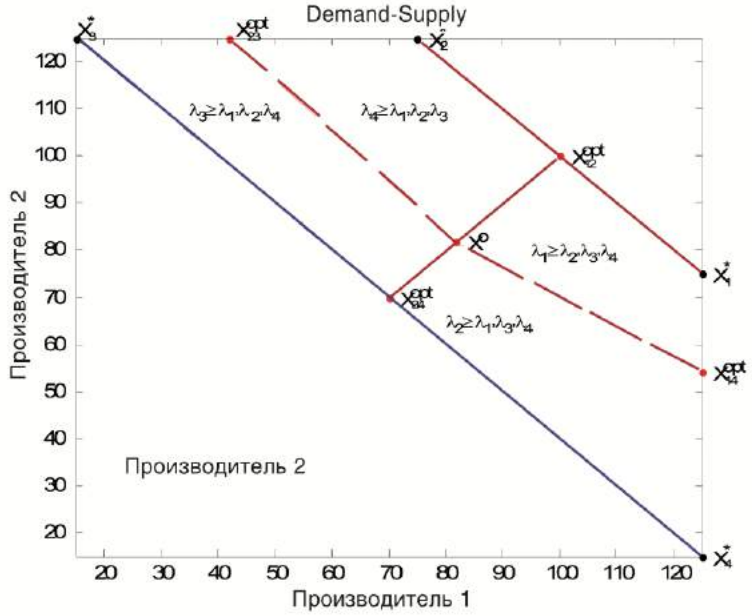

Рис. 2. Множество Парето и соответствующие оптимальные точки: $X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*$ и X^o в агрегированной системе координат x_1, x_2

$$f_k(X_k^*) = \begin{vmatrix} f_1(X_1^*) = 1250.0 & f_2(X_1^*) = 750.0 & f_3(X_1^*) = 5000.0 & f_4(X_1^*) = 5000.0 \\ f_1(X_2^*) = 750.0 & f_2(X_2^*) = 1250.0 & f_3(X_2^*) = 5000.0 & f_4(X_2^*) = 5000.0 \\ f_1(X_3^*) = 850.0 & f_2(X_3^*) = 850.0 & f_3(X_3^*) = 3500.0 & f_4(X_3^*) = 5000.0 \\ f_1(X_4^*) = 850.0 & f_2(X_4^*) = 850.0 & f_3(X_4^*) = 5000.0 & f_4(X_4^*) = 3500.0 \end{vmatrix} \quad (30)$$

Выполняем стандартную нормализацию критериев:

$$\lambda_k(X) = (f_k(X) - f_k^o) / (f_k^* - f_k^o),\ k = \overline{1,K}\,, \quad (31)$$

где $\lambda_k(X)$, $k = \overline{1,K}$ – относительная оценка точки $X \in S$ по k-му критерию, f_k^*, $k = \overline{1,K}$ – оптимальное решение по k-му критерию, полученное на первом шаге, f_k^o, $k = \overline{1,K}$ – наихудшее решение по k-му критерию, полученное на втором шаге: $f_k^o = \min\limits_{X \in S} f_k(X)$, $\forall k = \overline{1,2}$, $f_k^o = \max\limits_{X \in S} f_k(X)$, $\forall k = \overline{3,4}$;

$\forall k \in K$ – относительная оценка $\lambda_k(X)$, $k = \overline{1,K}$ лежит в пределах $0 \le \lambda_k(X) \le 1$.

Отклонения на допустимом множестве $\boldsymbol{S}$по каждому критерию равно

$d_k = f_k^* - f_k^o$, $k = \overline{1,K}$:d_1 = 1100.0, d_2 = 1100.0, d_3 = -1500.0, d_4 = -1500.0.

$$\lambda_k(X_k^*) = 4\begin{vmatrix} \lambda_1(X_1^*) = 1.0 & \lambda_2(X_1^*) = 0.5455 & \lambda_3(X_1^*) = 0.0 & \lambda_4(X_1^*) = 0.0 \\ \lambda_1(X_2^*) = 0.5455 & \lambda_2(X_2^*) = 1.0 & \lambda_3(X_2^*) = 0.0 & \lambda_4(X_2^*) = 0.0 \\ \lambda_1(X_3^*) = 0.6364 & \lambda_2(X_3^*) = 0.6364 & \lambda_3(X_3^*) = 1.0 & \lambda_4(X_3^*) = 0.0 \\ \lambda_1(X_4^*) = 0.6364 & \lambda_2(X_4^*) = 0.6364 & \lambda_3(X_4^*) = 0.0 & \lambda_4(X_4^*) = 1.0 \end{vmatrix}. \quad (32)$$

В точках оптимума нормализованные цели $\lambda_k^* = \lambda_k(X_k^*) = 1$, $\forall k \in K$. При оптимизации к этим точкам должен стремиться каждый участник рынка. На это направлена λ-задача.

Шаг 4. Построение λ-задачи осуществляется в два этапа.

На первом этапе строится максиминная задача:

$$\lambda^o = \max_X \min_{k\in K} \lambda_k(X), \tag{33}$$

$$G(X) \le B,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,N}.$$

На втором этапе введем дополнительную переменную:

$$\lambda = \min_{k\in K} \lambda_k(X). \tag{34}$$

λ- это минимальный уровень среди всех относительных оценок в точке $X \in \boldsymbol{S}$:

$$\lambda \le \lambda_k(X),\ k = \overline{1,K}.$$

Используя взаимосвязь (34) и (35), максиминную задачу (33) преобразуем в однокритериальную λ-задачу:

$$\lambda^o = \max \lambda, \tag{35}$$

$$\lambda - (f_k(X) - f_k^o)/(f_k^* - f_k^o) \le 0,\ k = \overline{1,K},$$

$$G(X) \le B,\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,N}.$$

λ-задача (35) решается стандартными методами.

В нашем примере λ-задача примет следующий вид:

$$\lambda^o = \max \lambda, \tag{36}$$

$$\lambda - \frac{10x_1 + 10x_2 - f_1^o}{f_1^* - f_1^o} \le 0,\quad \lambda - \frac{10x_3 + 10x_4 - f_2^o}{f_2^* - f_2^o} \le 0, \tag{37}$$

$$\lambda - \frac{50x_1 + 50x_3 - f_3^o}{f_3^* - f_3^o} \le 0,\quad \lambda - \frac{50x_2 + 10x_4 - f_4^o}{f_4^* - f_4^o} \le 0, \tag{38}$$

$$3500 \le 50x_1 + 50x_3 \le 5000,\ 3500 \le 50x_2 + 50x_4 \le 5000, \tag{39}$$

$$40x_1 + 40x_2 \le 5000, \qquad 40x_3 + 40x_4 \le 5000, \tag{40}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Шаг 5. Решение λ-задачи.

λ-задача – это стандартная задача линейного программирования, для ее решения используются стандартные методы, например функция *Matlab*: *linprog* (…).

В результате решения λ-задачи получаем точку оптимума

$$X^o = \{x_1 = 40.8929,\ x_2 = 40.8929,\ x_3 = 40.8929,\ x_4 = 40.8929\}$$

и максимальную относительную оценку $\lambda^o = 0.6071$, X^o (см. рис. 1);

$f_1(X^o) = 817.9$, $f_2(X^o) = 817.9$, $f_3(X^o) = 4089.3$, $f_4(X^o) = 4089.3$ – величины целевых функций в этой точке;

$\lambda_1(X^o) = 0.6071$, $\lambda_2(X^o) = 0.6071$, $\lambda_1(X^o) = 0.6071$, $\lambda_2(X^o) = 0.6071$ – величины относительных оценок в точке X^o.

Максимальная относительная оценка $\lambda^o = 0.6071$ является максимальным нижним уровнем для всех относительных оценок $\lambda^o = \min(\lambda_k(X^o),\ k = 1,\dots,4)$, т. е. гарантированным результатом в относительных единицах, который гарантирует, что в полученной оптимальной точке X^o все критерии равны или лучше λ^o, т. е. выполняются условия $\lambda_k(X^o) \geq \lambda^o$, $k = 1,2$, или в общем виде:

$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o)$, $k=\overline{1,K}$. Действительно,

$$\lambda_1(X^o) = (f_1(X^o)-f_1^o)/(f_1^*-f_1^o) = 0.\ 6071,\ldots,\ \lambda_4(X^o) = (f_4(X^o)-f_4^o)/(f_4^*-f_4^o) = 0.\ 6071.$$

С социальной точки зрения математическая модель рынка (25)–(29) реализует цели всех участников рынка (производителей и потребителей) и является социально направленной, эта модель соответствует социалистическому способу производства.

Анализ модели совершенной конкуренции.

Для оценки модели (25)–(29) рассмотрим агрегированную модель совершенной конкуренции. Для этого объединим данные производства и введем некоторые преобразования: объем продукции, произведенной первым производителем, обозначим как $X_1 = x_1+x_2$, а вторым как $X_2 = x_3+x_4$. Отсюда цели и ограничения задачи(25)–(29) примут вид:

$$\text{opt}F(X) = \{\max f_1(X) = 10X_1,\ \max f_2(\text{X}) = 10X_2, \tag{41}$$

$$\min f_3\ (X) = 25X_1+25X_2,\ \min f_4(\text{X}) = 25X_1+25X_2\} \tag{42}$$

при ограничениях $3500 \leq 25X_1 + 25X_2 \leq 5000,\ 3500 \leq 25X_1 + 25X_2 \leq 5000,$ (44)

$$40X_1 \leq 5000,\ 40X_2 \leq 5000,\ X_1,\ X_2 \geq 0. \tag{45}$$

В итоге получаем агрегированные показатели:

$X^{\text{o}} =\{\lambda(X^o) = 0.6071\ \ x_1= 81.7857\ \ x_2 = 81.7857\}$, Lo = λ^o= -0.6071

fX0 ={817.9 817.9 4089.3 4089.3}

LX0 = {0.6071 0.6071 0.6071 0.6071}.

Покажем точку оптимума X^{o} в системе *Matlab* на рис. 3.

X^o – точка оптимума, полученная при (четырех) равнозначных критериях, т. е. с учетом всех производителей и потребителей.

Область ограничений X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^* и X^o, представленные на рис. 2 в агрегированной системе координат x_1, x_2, покажем на трехмерном графике (рис. 3), где в качестве третьей координаты используем ось λ – относительные оценки.

На этом рисунке представлены четыре функции (в относительных единицах), определяющие цели, во-первых, индивидуальных производителей (41):

$$\lambda_1(X) = \frac{f_1(X) - f_1^o}{f_1^* - f_1^o},\ \lambda_2(X) = \frac{f_2(X) - f_2^o}{f_2^* - f_2^o},$$

где $f_1(X) = 10X_1$, $f_2(X) = 10X_2$ – текущее значение 1,2-го критерия в точке $X \in S$; f_{k}^* =1250 – величина k-го критерия в точке оптимума X_k^*, k = 1,2; f_k^o = 150 – наихудшая величина k-го критерия в точке X_k^o, k = 1,2;

и, во-вторых, обоих потребителей (42):

$$\lambda_3(X) = \frac{f_3(X) - f_3^o}{f_3^* - f_3^o},\ \lambda_4(X) = \frac{f_4(X) - f_4^o}{f_4^* - f_4^o}, \tag{46}$$

где $f_3(X) = f_4(X)=25X_1 + 25X_2$ – текущее значение 3, 4-го критерия в точке $X \in S$; f_k^* = 3500 – величина k-го критерия в точке оптимума X_k^*, k = 3; f_k^o = 5000 – наихудшая величина k-го критерия в точке X_k^o, k = 3,4.

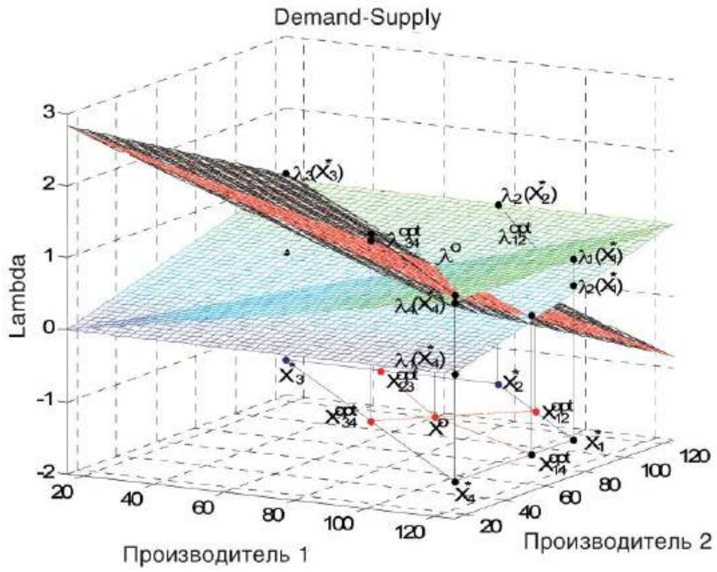

Рис. 3. Целевые функции производителя
и потребителя на области спроса-предложения

На рис. 3 область ограничений, как и на рис. 2, представлена точками X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, образующих четырехугольник, который искусственно опущен до λ = -1, (чтобы был виден). На нем также показана точка X^o.

Точка X^o учитывает целенаправленность производителей и потребителей продукции. Она является седловой, в ней:

во-первых, критерии равнозначны $\lambda^o = \lambda_1(X^o) = \lambda_2(X^o) = \lambda_3(X^o) = \lambda_4(X^o) =$ = 0.607, т. е. в этой точке интересы (критерии) как производителей, так и потребителей учтены в равной мере;

во-вторых, это равенство максимальное, т. е. не существует другой точки, в которой бы увеличение одного критерия не приводило бы к уменьшению другого, причем такая точка только одна;

в третьих, в терминах стоимостей финансовые затраты производителей и потребителей также равны между собой:

$$f_{\Sigma q}(X)=\sum_{q=1}^{Q}\sum_{l=1}^{L}(p_{ql}+a_{ql})x_{ql}=f_{\Sigma l}(X)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{q=1}^{Q}c_{ql}x_{ql}, \quad (47)$$

т. е. агрегированный спрос равен агрегированному предложению.

Моделирование поведения только производителей в модели совершенной конкуренции

Для оценки поведения только производителей в модели рынка (25)–(29) используются два критерия:

$$\text{opt } F(X) =\{\max f_1(X) = 10X_1, \max f_2(\mathrm{X}) = 10X_2, \quad (48)$$

при ограничениях (43)–(45). (49)

и соответствующей λ-задачи (36)–(40), которая в итоге примет вид:

$$\lambda^o = \max \lambda, \tag{50}$$

$$\lambda - \frac{10x_1 + 10x_2 - f_1^o}{f_1^* - f_1^o} \le 0,\ \lambda - \frac{10x_3 + 10x_4 - f_2^o}{f_2^* - f_2^o} \le 0 \tag{51}$$

при ограничениях (39), (40). (51)

В результате решения λ-задачи получаем:

$X_{12}^{opt} = \{x_1 = 50.0,\ x_2 = 50.0,\ x_3 = 50.0,\ x_4 = 50.0\}$ – точку оптимума

$\lambda_{12}^{opt} = 0.7727$ – максимальную относительную оценку;

$f_1(X_{12}^{opt}) = 1000$, $f_2(X_{12}^{opt}) = 1000$ – величины целевых функций в этой точке;

$\lambda_1(X_{12}^{opt}) = 0.7727$, $\lambda_2(X_{12}^{opt}) = 0.7727$ – величины относительных оценок.

Для оценки модели (48)–(50) рассмотрим агрегированную модель совершенной конкуренции, аналогичную (41)–(44), и представим геометрическую интерпретацию взаимосвязи в системе *Matlab* (рис. 4).

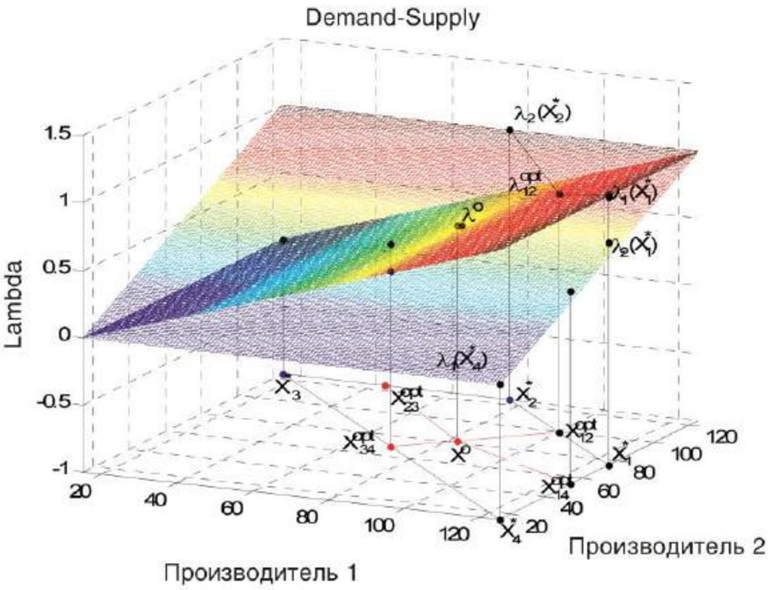

Рис. 4. Целевые функции производителей $\lambda_1(X^o)$, $\lambda_2(X^o)$
в области спроса-предложения

Точка X_{12}^{opt} учитывает целенаправленность обоих производителей продукции в совокупности, деятельность которых в относительных единицах представлена кривыми $\lambda_1(X)$ и $\lambda_2(X)$. Эти кривые на рис. 4 проходят через точки $X_1^* X_{12}^{opt} X_2^*$ и принимают следующие значения:

$$\lambda_1(X_1^*) = 1,\ \lambda_1(X_{12}^{opt}) = \lambda_2(X_{12}^{opt}) = 0.7727,\ \lambda_2(X_2^*) = 1.$$

Чтобы показать переход из X_1^* в X_2^*, они соединены отрезками. Понятно, что точка X_{12}^{opt} оптимальна по Парето, ибо нельзя улучшить один из критериев, не ухудшая второй.

Эти кривые, как указывалось ранее, представляют собой модель Курно, Штакельберга, Бертрана и Эджуорта [11, 12] в относительных единицах, и отражают конкуренцию, которая возникает во взаимоотношениях двух производителей (фирм). Математическая модель рынка (25)–(29) может отражать цели любого количества товаропроизводителей и потребителей.

О недостатках моделей, подобных Курно, говорилось и раньше, но не было математического аппарата, учитывающего влияние (целенаправленность) различных фирм. И только векторная оптимизация, в которой методы решения задач построены по принципу гарантированного результата и нормализации критериев, позволила решить эту проблему.

В терминах стоимостей финансовые затраты производителей и потребителей также равны между собой, т. е. выполняется равенство (47), но оно учитывает интересы только потребителей. Действительно, точке оптимума X_{12}^{opt} соответствуют относительные оценки $\lambda_1(X_{12}^{opt}) = \lambda_2(X_{12}^{opt}) = 0.7727$, а точке оптимума X^o – максимальная относительная оценка λ^o=0. 6071. Разность

$$\delta\lambda = \lambda_1(X_{12}^{opt}) - \lambda^o = 0.7727 - 0.6071 = 0.1656$$

характеризует объем прибыли, который присваивается производителями, невзирая на цели потребителей.

С социальной точки зрения математическая модель рынка потребителей (50)–(52) реализует цели всех производителей, т.е. получение максимальной прибыли, эта модель соответствует капиталистическому способу производства.

Моделирование поведения только потребителей в модели совершенной конкуренции

Для оценки поведения только потребителей в модели рынка (25)–(29) используются два критерия:

$$\text{opt } F(X) =\{ \min f_3 (X) = 25X_1+25X_2, \min f_4(X) = 25X_1+25X_2\}, \qquad (53)$$

при ограничениях (43)–(45). (54)

и соответствующей λ-задачи (36)-(40), которая в итоге примет вид:

$$\lambda^o = \max \lambda, \qquad (55)$$

$$\lambda - \frac{50x_1 + 50x_3 - f_3^o}{f_3^* - f_3^o} \le 0,\ \lambda - \frac{50x_2 + 10x_4 - f_4^o}{f_4^* - f_4^o} \le 0, \qquad (56)$$

при ограничениях (39), (40).

В результате решения λ-задачи получаем:

X_{34}^{opt}={x_1= 40.0, x_2= 40.0, x_3 = 40.0, x_4 = 40.0} – точку оптимума;

λ_{34}^{opt}=0.6667 – максимальную относительную оценку;

$f_3(X_{34}^{opt}) = 4000$, $f_4(X_{34}^{opt}) = 4000$ – величины целевых функций в этой точке;

$\lambda_3(X_{34}^{opt}) = 0.6667$, $\lambda_4(X_{34}^{opt}) = 0.6667$ –величины относительных оценок.

Для оценки модели (55)–(56) рассмотрим агрегированную модель совершенной конкуренции, аналогичную (41)–(44), и представим геометрическую интерпретацию взаимосвязи в системе *Matlab* (рис. 5).

Точка X_{34}^{opt} учитывает целенаправленность обоих потребителей продукции в совокупности, деятельность которых в относительных единицах представлена кривыми $\lambda_1(X)$ и $\lambda_2(X)$. Эти кривые на рис. 5 проходят через точки X_3^* $X_{34}^{opt} X_4^*$ и принимают следующие значения:

$$\lambda_3(X_3^*) = 1,\ \lambda_3(X_{34}^{opt}) = \lambda_4(X_{34}^{opt}) = 0.6667,\ \lambda_4(X_4^*) = 1.$$

Чтобы показать переход из X_3^* в X_4^*, их соединяем отрезками. Понятно, что точка X_{34}^{opt} оптимальна по Парето, ибо нельзя улучшить один из критериев, не ухудшая второй.

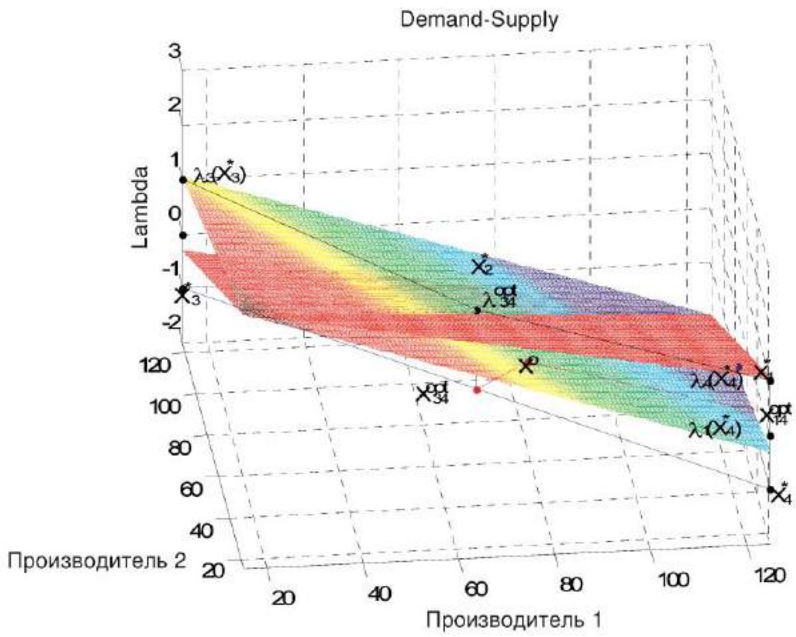

Рис. 5. Целевые функции потребителей $\lambda_3(X^o)$, $\lambda_4(X^o)$ в области спроса-предложения

С социальной точки зрения математическая модель рынка потребителей (53)–(54) реализует цели всех потребителей, т.е. игнорирование целей производителей; эта модель соответствует рабовладельческому способу производства.

Заключение

В рассмотренной оптимизационной модели рынка и его числового варианта впервые исследована структура рынка с учетом целей как производителей, так и потребителей в совокупности. Полученный результат (структура рынка совершенной конкуренции) показывает социальную направленность деятельности каждого из множества производителей и потребителей с точки зрения способа производства. Таким образом, математическая модель рынка, представленная векторной задачей математического программирования, может служить основой для моделирования и прогнозирования развития рынка. Автор готов предоставить разработанные модели и программное обеспечение для решения задач моделирования и прогнозирования развития различных рыночных структур.

Список источников / References

1. Машунин Ю.К. Теория, математическое моделирование и прогнозирование развития рынка. *Известия ДВФУ. Экономика и управление*, 2016, № 4, сс. 3–17. [Machunin Yu. K. Teoria, matematicheskoe modelirovanie razvitia rinka [Theory, mathematical modeling and forecasting of market development]. *Izvestia DVFU. Ekonomika I upravlenie – FEFU news. Economy and management*, 2016, no. 4, pp. 3–17.
2. Arrow K. J., Debreu G. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 1954, vol. 22, no. 3, pp. 265–290.
3. McKenzie L.W. On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive market. *Econometrica*, 1954, vol. 22, no. 2, pp. 147–161.
4. Gale D. On optimal development in multi-sector economy. *Rev. Econ. Studies*, 1967, vol. 34, no.1.
5. Nikaido H. Stability of equilibrium by the Brown – von Neumann differential equation. *Econometrica*, 1959, vol. 27, no. 4.
6. Моришима М. *Равновесие, устойчивость, рост (Многоотраслевой анализ).* Москва, Наука, 1972. 280 с. [Morishima M. *Ravnovesie, ustoychivost', rost (Mnogootraslevoy analiz)* [Equilibrium Stability, and Growth: A Multi-Sector Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 280 p.]
7. Nikaido H. Convex structures and economic theory. New York and London, Academic press, 1968.
8. Ланкастер Л. *Математическая экономика*. Москва, Наука, 1972. 280 с. [Lancaster L. *Matematicheskaya economika* [Mathematical economy]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 280 p.]
9. Тироль Жан. *Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности*. Санкт-Петербург, Экономическая школа, 1996. 745 с. [Tyrol Zhan. *Rynki i rynochnaya vlast': Teoriya organizatsii promyshlennosti* [Markets and market power: Theory of industry organization]. St-Petersburg, Economic school Publ.. 1996. 745 p.]
10. Шерер Ф., Росс Д. Структура отраслевых рынков. Москва, ИНФРА-М, 1997. 698 с. [Sherer F.A., Ross D. Struktura otraslevykh rynkov [Industrial Market Structure]. Moscow, INFRA-M Publ., 1997. 698 p.
11. Байе М.Р. *Управленческая экономика и стратегия бизнеса*. Москва, ЮНИТИ-ДАНА, 1999. 743 с. [Baye M.R. *Upravlencheskaya ekonomika i strategiya biznesa* [Managerial Economics and Business Strategy]. Moscow, UNITI-DANA, 1999. 743 c.
12. Сио Л.К. *Управленческая экономика*: пер. с англ. Москва, ИНФРА-М, 2000. 671 с. [Sio K.K. *Upravlencheskaya ekonomika* [Managerial Economics]. Moscow, INFRA-M Publ., 2000. 671 p.]
13. Машунин Ю.К. *Теория и моделирование рынка на основе векторной оптимизации.* Москва, Университетская книга, 2010. 352 с. [Mashunin Yu.K. *Teoriya i modelirovanie rynka na osnove vektornoy optimizatsii* [The theory and modeling of the market on the basis of vector optimization of management]. Moscow, University book Publ., 2010. 352 p.
14. Mashunin Yu.K. and Mashunin I.A. Mathematical model of the Market. *International Journal of Information Technology and Business Management (IJTBM)*, 2014, vol. 25, no. 1, pp. 45–61. Available at: http://www.jitbm.com/jitbm%-2025th%20volume/5%20Marketing%20Model.pdf
15. Машунин Ю.К. *Методы и модели векторной оптимизации*. Москва, Наука, 1986. 141с. [Mashunin, Yu.K. *Metody I modeli vektornoy optimizatsii* [Methods and models of vector optimization]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 141 p.]
16. Машунин Ю.К. *Теория управления. Математический аппарат управления экономикой.* Москва, Логос, 2013. 448 с. [Mashunin Yu. K. *Teoriya uprav-*

leniya. Matematicheskiy apparat upravleniya ekonomikoy [Management theory. The mathematical apparatus of management of the economy]. Moscow, Logos Publ., 2013. 448 p.]

17. Машунин Ю.К. Моделирование и прогнозирование развития фирмы на базе векторной оптимизации (1. Постановка проблемы). *Известия ДВФУ. Экономика и управление*, 2016, № 1, сс. 17–36. [Machunin Yu. K. Modelirovanie i prognozirovanie razvitia firmy na baze vektornoy optimizattsii (1. Postanovka problemy) [Modeling and forecasting of development of firm on the basis of vector optimization (1. Statement of a problem)]. *Izvestia DVFU. Ekonomika I upravlenie – FEFU news. Economy and management*, 2016, no. 1, pp. 17–36.

Сведения об авторе /About author

Машунин Юрий Константинович, кандидат технических наук, доктор экономических наук, доцент, профессор кафедры «Государственное и муниципальное управление», Школа экономики и менеджмента Дальневосточного федерального университета. 690920 г. Владивосток, о-в Русский, кампус ДВФУ, корп. G, ауд. 525. *E-mail: mashunin@mail.ru.*

Yuriy K. Mashunin, Candidate of Engineering Science, Doctor of Economic Sciences, Associate Professor. Far Eastern Federal University, School of Economics and Management, Department «State and municipal management», Professor. Bldg. G Ajax Street, 525 Office, 690920, Vladivostok. *E-mail: mashunin@mail.ru.*

Адрес сайта в сети интернет: http://jem.dvfu.ru