Проблема коллективного выбора, теорема Эрроу и ее короткое доказательство

Алексей Савватеев[1], Александр Филатов[2*], Дмитрий Шварц[1]

[1]Университет Дмитрия Пожарского, г. Москва, Россия
[2]Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Информация о статье
Поступила в редакцию:
16.11.2018
Принята к опубликованию:
27.11.2018

УДК 330.42
JEL D7

Аннотация
В работе исследуются проблемы, возникающие при необходимости принять на основе неоднородных индивидуальных предпочтений единое групповое решение. Показано, что проиллюстрированная на множестве красивых парадоксов проблема глубже плохих механизмов коллективного выбора, и дело в несовместимости демократии с базовыми принципами какого-либо разумного способа принятия решений. Об этом говорит теорема Эрроу, наиболее короткое доказательство которой излагается в статье. Также представлены и некоторые компромиссные подходы, предлагающие решение проблемы коллективного выбора лучше наиболее распространенных аналогов.

Ключевые слова:
коллективный выбор, предпочтения, неоднородность, парадоксы голосования, аксиоматический подход, теорема Эрроу

The Problem of Collective Choice, Arrow's Impossibility Theorem, and it's Short Proof

Alexey Savvateev, Aleksander Filatov, Dmitry Schwartz

Keywords:
collective choice, preferences, heterogeneity, voting paradoxes, axiomatic approach, Arrow's theorem

Abstract
The paper examines the problems that arise when a single decision has to be made by a single group based on the individual heterogeneous preferences. An axiomatic approach is applied to the theory of collective choice. A number of desirable requirements for the rule of the collective choice to take effect are listed, it also has been clarified how such requirements are fulfilled in practice by the electoral systems. It is shown that the problem illustrated by the set of paradoxes is deeper than the bad collective choice mechanism, and it shows how democracy is incompatible with the basic principles of any reasonable decision making which is demonstrated by the Arrow theorem. The proof for the shortest theorem is demonstrated as well. In addition, this paper describes some compromise approaches that offer better solutions of the collective choice problem than the most common analogs, namely, the transition to probabilistic voting rules, limiting the scope of preferences and using methods by which the costs of not meeting a number of requirements are minimal. The Schulze method is the method of driving a path - according to

* *Автор для связи: E-mail: filatov.aiu@dvfu.ru*
DOI: https://dx.doi.org/10.24866/2311-2271/2018-4/5-22

which all information about the preferences of voters with respect to each pair of candidates is used.

Введение

В экономике существует множество ситуаций, когда индивидуально рациональное поведение приводит общество к плохому итогу. Ценовые и рекламные войны, невозможность полноценного финансирования общественного блага, хищническое использование общественного ресурса, отрицательный отбор и постконтрактный оппортунизм – лишь малая доля примеров, демонстрирующих тот факт, что многие общественно значимые решения не должны приниматься на основе исключительно рыночных механизмов.

Однако и коллективное принятие решений несет в себе свои подводные камни. И дело далеко не в политкорректности по отношению к меньшинству. Для случая двух альтернатив можно использовать правило простого большинства, удовлетворяющее ряду разумных требований: анонимности (равноправия лиц, принимающих решения), нейтральности (равноправия альтернатив) и монотонности (усиление поддержки не подвергает сомнению осуществленный ранее выбор). Рассматриваемое правило также является неманипулируемым (независимым от посторонних альтернатив) – нет никакого смысла обманывать, отдавая голос конкурентам (иными словами, стратегическое голосование в данном случае исключено). Но дело в том, что альтернатив, как правило, больше двух.

Постановка задачи (в ее современном понимании) такова: пусть перед обществом стоит несколько альтернатив. Это могут быть кандидаты на выборах или какие-либо проекты, типа «провести дорогу», «построить стадион», «учредить университет» и т.д. Все члены общества имеют свои предпочтения относительно имеющихся альтернатив. Необходимо на основе этих индивидуальных мнений определить коллективное упорядочение.

Поиском наилучшего правила коллективного выбора занимались многие специалисты, предложившие немало избирательных систем, подчас очень экзотических. Помимо хорошо знакомой всем мажоритарной системы – победитель получает все – в один или два тура, а также пропорциональной системы (иногда с поправками вроде барьера в 7% на выборах в Государственную Думу), имеется, например, система выборщиков в США, странная, но до сих использующаяся, несмотря на то, что в ней может победить кандидат, за которого проголосовало меньшинство (что и произошло на последних выборах); часть штатов играет роль статистов (в Техасе, Юте и Оклахоме в любом случае победят республиканцы, а в Калифорнии, Мэриленде и на Гавайях – демократы), а влияние колеблющихся штатов (вроде Флориды) гипертрофировано; «третья сила» не имеет шансов на победу даже при наличии серьезной поддержки избирателей (Росс Перо, завоевавший поддержку почти 20% пришедших на участки избирателей, не получил ни одного голоса выборщиков); существенные проблемы вносит округление и т.д. [1]

Вообще история вопроса восходит к трудам святого Р. Луллия, который еще в XIII в. задался вопросами разумного решения проблемы коллективного выбора. Пик интереса к данной теме пришелся на конец XVIII в., то есть на время Великой французской революции. В пылу революционного энтузиазма просвещенные умы верили, что существует универсальный механизм, позволяющий на основе любого набора индивидуальных предпочтений построить идеальное агрегированное предпочтение, «точку зрения коллектива». В частности, две альтернативные системы голосования были выдвинуты французскими математиками Кондорсе [2] и Борда [3].

Мари Жан Антуан Никола Кондорсе в 1785 г. предложил для выявления истинной воли большинства следующий алгоритм. Каждый голосующий должен проранжировать всех кандидатов в порядке убывания предпочтений. После этого для выбранной пары кандидатов определяется, сколько голосующих предпочитают одного кандидата другому. Победителем считается выигравший всех в парном голосовании. Проблема заключается в том, что это правило может не приводить ни к какому результату, как в знаменитом цикле Кондорсе [2]. Например, для трех избирателей с профилями, мы получим, что альтернатива А для большинства лучше альтернативы В, аналогично В для двоих из троих предпочтительнее С. Но поскольку С оказывается лучше А, круг замыкается.

Альтернативой является рейтинговое голосование, исходный вариант которого был предложен еще в 1781 г. Ж. Ш. Борда [3]. По его мнению, необходимо ввести следующую балльную систему: наихудшая альтернатива не получает баллов вообще, предпоследняя – один балл, третья с конца – два балла и т.д. При этом победителем по Борда становится альтернатива с максимальной по всем избирателям суммой баллов. Очевидно, что правило Борда можно обобщить, задав произвольную неубывающую систему баллов.

Кстати, правило относительного большинства, обычно использующееся на политических выборах, является одним из обобщений правила Борда с наиболее простой системой баллов: за все места, кроме первого, баллы не засчитываются, а наилучшая альтернатива получает один балл: (0; 0; …; 0; 1). Есть также менее распространенное правило антибольшинства. Из бюллетеня вычеркивается единственный наиболее неприемлемый кандидат. Кто реже всего оказался вычеркнут, тот и побеждает. Это эквивалентно использованию баллов (0; 1; …; 1; 1) в голосовании по обобщенной системе Борда.

Относительно преимуществ и недостатков методов Кондорсе и Борда шли долгие дискуссии. Ответом на циклы Кондорсе явились вариации Копленда и Симпсона, позволяющие осуществить выбор в ситуации отсутствия победителя. Победителем по Копленду (точнее, по первому из его правил) считается кандидат, одержавший максимальное число побед в парных поединках. Так часто определяют победителя в спортивных соревнованиях. При этом вовсе не обязательно выиграть всех. Победитель по Симпсону – кандидат, никому не проигравший сильно. Максимизируется наименьшее число избирателей, голосующих за данного кандидата при парном сравнении с другими. Это вариант более применим к политике, где ситуация будет нестабильной, если победитель серьезно уступает кому-то из конкурентов.

Нужно также понимать, что механизмы Кондорсе и Борда могут давать разные результаты. Например, может случиться так, что существующий победитель по Кондорсе (который лучше всех остальных альтернатив) не будет избран ни при каком методе подсчета очков [4]. Пусть мнения 17-и избирателей таковы: шестеро считают, что $A \succ B \succ C$, четверо, что $B \succ C \succ A$, четверо, что $B \succ A \succ C$, и трое, что $C \succ A \succ B$. Легко заметить, что А будет победителем по Кондорсе. Действительно, 9 избирателей против 8 считают, что $A \succ B$, а 10 против 7 – что $A \succ C$. Тем не менее, попробуем применить рейтинговую систему с произвольными баллами $s_2 \geq s_1 \geq s_0$, $s_2 > s_0$, которые даются, соответственно, за первое, второе и третье места в списке. Получим, что альтернатива A 6 раз оказывается на первом месте, 7 раз – на втором, 4 раза – на последнем и получает рейтинг $6s_2 + 7s_1 + 4s_0$. При этом альтернатива B 8 раз оказывается первой, 6 раз – второй и 3 раза – третьей с рейтингом $8s_2 + 6s_1 + 3s_0$. Поскольку выполняется неравенство $(8s_2 + 6s_1 + 3s_0) - (6s_2 + 7s_1 + 4s_0) = 2s_2 - s_1 - s_0 > 0$, при любой рейтинговой системе альтернатива B выигрывает у A, являющейся победителем по Кондорсе. Победитель по Кондорсе не будет выбран ни при какой очковой шкале.

Аксиоматический подход

Попробуем применить к теории коллективного выбора аксиоматический подход. Перечислим ряд желательных требований к правилу коллективного выбора и выясним, насколько они выполняются для использующихся на практике избирательных систем.

Однозначность. Правило всегда позволяет осуществить однозначный выбор. Хорошая избирательная система должна быть устойчива к любым ситуациям, даже если при двух кандидатах и четном числе избирателей их голоса распределились строго поровну. В то же время, это требование не выполняется для анонимных и нейтральных правил, если число избирателей *n* имеет делитель, не превосходящий *p*.

Анонимность (равноправие избирателей). Требуется, чтобы имена избирателей не имели значения: если два избирателя поменяются голосами, то результат выборов не изменится. Требование не выполняется, если при прочих равных условиях победителем становится кандидат, выбранный определенным избирателем (президентом, председателем совета директоров или кем-то, кто имеет более широкие полномочия, чем обычные избиратели).

Нейтральность (равноправие альтернатив). Имена кандидатов не имеют значения: если поменять местами кандидатов *A* и *B* в предпочтении каждого избирателя, то исход голосования также поменяется соответствующим образом. Требование не выполняется, если при прочих равных условиях победителем становится определенный кандидат. Например, кандидаты ранжируются по алфавиту, или, как прежде в шахматах, при равенстве очков чемпион мира сохранял свое звание.

Состоятельность по Кондорсе. Правило всегда выбирает победителя по Кондорсе, если он существует. Как было показано в предыдущем разделе, это требование не выполняется для любых методов подсчета очков, в том числе, для широко используемого на практике правила относительного большинства, правила Борда и любых его обобщений.

Парето-эффективность (единогласие). Если кандидат *A* для всех избирателей лучше *B*, то *B* не может быть избранным. Даже это очевидное правило, как ни странно, выполняется далеко не всегда. Парето-эффективность не выполняется для правила антибольшинства.

Пусть для всех избирателей кандидат *A* лучше кандидата *B*, который в свою очередь лучше кандидата *C* ($A \succ B \succ C$). Результаты подсчета по правилу антибольшинства следующие: (0; 0; *n*). Ни *A*, ни *B* ни разу не оказались на последнем месте и в этом смысле равны. Если мы требуем выполнения однозначности, то по дополнительным показателям победителем может оказаться *B* (например, являясь действующим главой государства), несмотря на единогласное мнение избирателей, что *A* является лучшим.

Не менее серьезные неприятности могут ожидать нас при последовательном парном сравнении альтернатив по простому большинству. Это правило применяется на практике довольно часто. Например, на голосование могут поочередно ставиться альтернативные варианты законопроекта (а еще чаще законопроекта и поправок к нему). Легко обнаружить, что манипулирование повесткой дня определяет контроль над выборами.

Рассмотрим пример. Пусть решение принимают 5 депутатов, чьи профили предпочтений представлены на рис.1. Результаты попарного сравнения альтернатив принимают вид: $A \succ B,\ A \succ C,\ B \succ C,\ B \succ D,\ C \succ D,\ D \succ A$

A	A	D	D	B
B	B	B	C	C
C	C	A	A	D
D	D	C	B	A

Рис. 1. Профили предпочтений

Можно ли в таких условиях сделать победителем альтернативу A? Безусловно. Для этого нужно, чтобы опасная альтернатива D была выбита альтернативой B. На рис.2 показано, как спикер приводит к победе любую из альтернатив, нарушая при этом аксиому нейтральности.

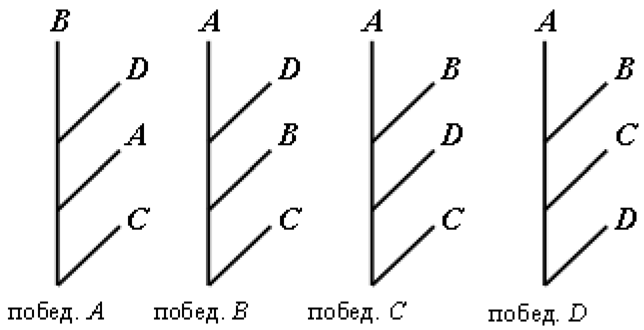

Рис. 2. Возможность спикера привести к победе любую из альтернатив

Для последовательного парного сравнения альтернатив не выполняется и Парето-эффективность. На рис.3 продемонстрирован короткий пример с тремя представителями законодательной власти, последовательно выбирающими лучший из четырех вариантов законопроекта.

$B \qquad A \qquad C$

A	D	B
D	C	A
C	B	D

Рис. 3. Пример выбора лучшего варианта законопроекта

Большинством голосов (2:1) принимается решение, что с таким же счетом законопроект *C* выигрывает у *B*, а *D* выигрывает у *C*. Таким образом, победителем благодаря этому порядку, установленному спикером, оказывается законопроект *D*, который хуже *A* для всех лиц, принимающих решение.

Многие считают, что проблема состоит исключительно в неравном положении первой и последней альтернатив, выносимых на голосование. В представленном примере альтернативе *A* для победы необходимо быть победителем по Кондорсе, а альтернативе *D* достаточно быть лучше, чем *C*.

Конечно, более честной была бы ситуация, в которой каждая альтернатива находилась бы в равном положении относительно количества парных поединков необходимых для победы. Неслучайно в спортивных соревнованиях победители групп сначала выходят в четвертьфинал, затем в полуфинал, и, наконец в финале выявляют абсолютного победителя. Однако даже в этом случае возможна Парето-неэффективность, правда, с поправкой на то, что победитель в парном поединке должен выбираться по некоторым дополнительным показателям, что нарушает аксиому нейтральности.

Пусть в «полуфиналах» осуществляется выбор между двумя первыми и двумя последними альтернативами. Их победители выходят в финал, где и оспаривают итоговое первенство. На данных, представленных на рис.4, в финал выходят *A* и, по дополнительному показателю, C ($A \succ B, C \succ D$), а в финале по дополнительному показателю победителем оказывается A ($A \succ C$), при том, что $D \succ A$ для всех избирателей.

D	D	C	C
A	A	D	D
C	C	A	A
B	B	B	B

Рис. 4. Определение победителя

Монотонность. Данное свойство заключается в том, что увеличившаяся поддержка кандидата не может уменьшить шансы быть избранным. Мы часто видим на экранах телевизоров известных политиков, участвующих в выборах, в день голосования на избирательных участках. И хотя агитация запрещена, не вызывает сомнения, в какой графе будет поставлена галочка. Тем не менее, как ни странно, в многоступенчатых выборах, даже придя на участок, не всегда выгодно голосовать за себя. Причиной является возможная смена состава участников последующих туров голосования, что может непредсказуемо повлиять на исход выборов.

К многоступенчатым относятся, например, выборы, проходящие по системе Хэйра, согласно которой в каждом туре исключается один кандидат, наименее симпатичный для избирателей, т. е. чаще всего оказывающийся на последнем месте (эта система особенно часто применяется в различных телевизионных шоу) или по применяемому во многих странах (в том числе, в России на президентских выборах) правилу относительного большинства с выбыванием (голосованию в 2 тура). Рассмотрим численный пример (рис.5).

Профиль 1				***Профиль 2***			
6	**5**	**4**	**2**	**6**	**5**	**4**	**2**
A	*C*	*B*	**B**	*A*	*C*	*B*	**A**
B	*A*	*C*	**A**	*B*	*A*	*C*	**B**
C	*B*	*A*	*C*	*C*	*B*	*A*	*C*

Рис. 5. Пример выборов, проходящих по системе Хэйра

Пусть выбор осуществляется по правилу относительного большинства с выбыванием. В изначальном варианте (профиль 1) во второй тур выходят *A* и *B*, при этом $A \succ B$ (11:6). После того как *A* улучшает свое положение, например, успешно проведя дебаты (в профиле 2 двое последних избирателей начинают ценить *A* выше, чем *B*), в финал выходят *A* и *C*. При этом *C* побеждает *A* (9:8).

Пополнение. Если две независимые группы избирателей выбирают некоторого кандидата, то, объединившись, они выберут его же. Особенно важное правило для федеративных государств. Вряд ли удастся избежать волнений, если во всех юрисдикциях поддержат одного кандидата, а победителем на федеральном уровне будет назван другой. Однако это правило не выполняется для любого однозначного правила, состоятельного по Кондорсе. Рассмотрим пример, представленный на рис.6.

Группа 1			***Группа 2***	
2	**2**	**2**	**4**	**3**
C	*A*	*B*	*A*	*B*
B	*C*	*A*	*B*	*A*
A	*B*	*C*	*C*	*C*

Рис. 6. Пример пополнения

Видно, что в первой группе наблюдается цикл Кондорсе. Однако однозначный метод должен указать на победителя. Пусть им окажется кандидат *A*.

Во второй группе кандидат *A* также является победителем. Однако при объединении двух групп видим, что победителем по Кондорсе становится кандидат *B*: $B \succ A$ (7:6), $B \succ C$ (9:4).

Участие. Собственный бюллетень, опущенный в урну, не может уменьшить полезность избирателя. Данное свойство похоже на монотонность, но, в отличие от него, связано не с усилением позиции кандидата в глазах действующих избирателей, а с появлением новых избирателей.

Для невыполнения этого свойства не требуется даже многоступенчатой системы выборов, достаточно, чтобы правило было состоятельно по Кондорсе, а в выборах участвовало не менее четырех кандидатов. Приведем пример для правила Симпсона (рис.7).

3	**3**	**5**	**4**	**4**
A	*A*	*D*	*B*	*C*
D	*D*	*B*	*C*	***A***
C	*B*	*C*	*A*	***B***
B	*C*	*A*	*D*	*D*

Рис. 7. Пример правила Симпсона

Построим мажоритарный турнир для этого примера (рис.8). Например, кандидат *A* проигрывает кандидатам *B* и *C* со счетом 6:9, но выигрывает у кандидата *D* со счетом 10:5. Соответственно, до участия в выборах четырех избирателей, предпочитающих кандидата *A* кандидату *B*, победителем являлся именно *A*: *S(A) = 6(B,C), S(B) = 4(D), S(C) = 3(B), S(D) = 5(A).*

	A	*B*	*C*	*D*
A		6	6	10
B	9		12	4
C	9	3		4
D	5	11	11	

Рис. 8. Мажоритарный турнир для примера правила Симпсона

После их участия мажоритарный турнир незначительно изменится (рис.9). Однако этого оказывается достаточно, чтобы по правилу Симпсона победил кандидат *B*, который хуже прежнего победителя *A* для избирателей, инициировавших своим участием эти изменения.

Действительно, *S(A) = 6(C), S(B) = 8(D), S(C) = 7(D), S(D) = 5(A).*

	A	*B*	*C*	*D*
A		10	6	14
B	9		12	8
C	13	7		8
D	5	11	11	

Рис. 9. Мажоритарный турнир для примера правила Симпсона (2)

Независимость от посторонних альтернатив (неманипулируемость). Если для всех избирателей при изменении предпочтений альтернативы *A* и *B* останутся в том же порядке, то их порядок не изменится и в итоговом упорядочении. Данное свойство являлось бы очень желательным, поскольку при его выполнении нельзя увеличить свою полезность, ведя стратегическое голосование. А оно очень опасно: избиратели могут, ставя главных соперников на последние места с целью победы своего кандидата любой ценой, привести к победе кандидата, неприемлемого для всех.

Целью многих исследований стал поиск «истинного», самого справедливого и неманипулируемого правила выбора, которое бы обладало тем свойством, что для сравнения данной пары альтернатив не нужно было бы опрашивать избирателей об их отношении к остальным. Было предложено множество хитроумных правил выбора, но ни одно из них не удовлетворяло простым и, казалось бы, вполне естественным требованиям.

Каково же было замешательство в научных кругах, когда в 1951 г. Кеннет Эрроу объявил, что единственным правилом «из всех вообще мыслимых правил», удовлетворяющим вышеупомянутому требованию, является правило диктатора, т.е. полное игнорирование предпочтений и пожеланий всех граждан, кроме единственного, навязывающего обществу свою волю.

Оригинальное доказательство теоремы Эрроу [5] было технически сложным, однако к настоящему времени появилось 3 существенно более коротких доказательства [6], из которых можно сделать «сплав», еще более прозрачный.

Теорема Эрроу и ее кратчайшее доказательство

Обозначим за *N* множество членов общества, за *A* – множество доступных обществу альтернатив, а за P_i предпочтения *i*-игрока, которые в нашем случае представляют собой просто линейный некоторый порядок, т.е. полное, антисимметричное (если при $a \neq b$ верно aPb, то bPa верным быть не может) и транзитивное отношение на множестве альтернатив (мы говорим, что aP_ib в том и только том случае, когда *i*-избиратель считает альтернативу a не хуже альтернативы b, в частности, $aP_i a$ всегда). Набор отношений $(P_1, \ldots, P_n)$ называется профилем участников и обозначается как $\vec{P} = \{P_i\}_{i=1}^{n}$. Для дальнейшего удобства также введем в рассмотрение множество участников, которое включает пару (*a*, *b*) в свои отношения P_i, т.е. $V(a,b;\vec{P}) = \{i \in N \mid aP_ib\}$.

Напомним, что бинарное отношение P называется слабым порядком, если оно полно и транзитивно, однако не обязательно антисимметрично, т.е. при $a \neq b$ возможна ситуация, что одновременно *aPb* и *bPa*, и альтернативы *a* и *b* равнозначны между собой. Менее формально, это нестрогое предпочтение – упорядочиваются не альтернативы, а классы эквивалентных альтернатив. Множество всех линейных порядков на множестве альтернатив обозначим за *LO*, а множество слабых порядков – за *WO*. Мы предполагаем, что в то время, как индивидуальные предпочтения P_i являются линейными порядками, коллективное предпочтение может быть только слабым порядком – некоторые альтернативы для общества могут оказаться равноценными.

Задача коллективного выбора состоит в построении, и по любому мыслимому профилю участников отношения *P*, отражающего мнение коллектива как единого целого. Более формально, функционалом коллективного выбора *F* называется правило построения коллективного предпочтения по профилю личных предпочтений, т.е. произвольное отображение *F*: $LON \to WO$. Обозначим для краткости $P = F(\vec{P})$.

Наложим на функционал *F* следующие два ограничения:

1. Парето-эффективность:

$$\forall(x,y), \forall\vec{P} \ \{V(x,y;\vec{P}) = N\} \Rightarrow xPy \text{ и не } yPx.$$

2. Независимость от посторонних альтернатив: для любой пары альтернатив *(x, y)* решение о том, какая из них предпочтительнее другой в коллективном решении *R*, зависит только от информации относительно этих альтернатив в индивидуальных отношениях R_i:

$$\forall(x,y), \forall\vec{P},\vec{P}' \ \ V(x,y;\vec{P}) = V(x,y;\vec{P}') \Rightarrow (xPy \Leftrightarrow xP'y).$$

Существует пример «нечестного» функционала, заведомо удовлетворяющего этим двум требованиям. Представим себе, что среди членов общества есть человек, во всех случаях навязывающий коллективу свое мнение. Примем это мнение за функционал. Формально, этот функционал определяется как $F(P_1,\ldots,P_n) = P_d$ при некотором *d*, т.е. функционал общественного мнения – есть проекция профиля на *d*-координату. Построенный функционал носит название диктаторского. Кеннет Эрроу в 1951 г. доказал [5] теорему.

Теорема Эрроу. *Пусть число альтернатив больше двух. Тогда функционал, удовлетворяющий условиям Парето-эффективности и независимости от посторонних альтернатив, является диктаторским.*

Наметим схему доказательства теоремы Эрроу в виде нескольких лемм:

<u>Лемма 1 (о нейтральности).</u> Пусть $V(x,y;\vec{P}) = V(z,t;\vec{P})$. Тогда из *xPy* следует *zPt*. Переставив местами пары *(x,y)* и *(z,t)*, получим, что, на самом деле, в этом случае наблюдается эквивалентность: $xPy \Leftrightarrow zPt$.

Доказательство. Достаточно показать, как заменить *y* на *t*, т.е. доказать, что при $y \neq t$, если $V\left(x, y; \vec{P}\right) = V\left(x, t; \vec{P}\right)$ и xPy, то xPt. При доказательстве этого, а также многих последующих утверждений используется один и тот же прием. А именно, по условию независимости от посторонних альтернатив, ответ на вопрос xPt или tPx зависит только от множества $W_{x,t} = V\left(x, t; \vec{P}\right)$. Помимо этого, никакой другой информации о профиле P не требуется. Следовательно, если доказать, что $xP't$ для какого-то одного профиля с тем же самым $W_{x,t} = V\left(x, t; \vec{P}'\right)$, то это будет верно и для остальных таких профилей, в частности, и для исходного профиля P. Поэтому рассмотрим следующий удобный профиль P':

$$\begin{array}{cc}
V\left(x, y; \vec{P}'\right) & V\left(y, x; \vec{P}'\right) \\
\ldots & \ldots \\
x & y \\
y & t \\
t & x \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Так как $V\left(x, y; \vec{P}\right) = V\left(x, y; \vec{P}'\right)$, имеем $xP'y$ (по условию xPy, а по аксиоме независимости $xPy \Leftrightarrow xP'y$). Далее, $yP't$ по условию Парето-эффективности (все избиратели считают y предпочтительнее t). Поскольку P' транзитивно, получаем $xP't$. И опять применяем аксиому независимости, получая xPt.

Определение. Пусть дан профиль $\vec{P}$ индивидуальных предпочтений. Назовем альтернативу a экстремальной, если все избиратели считают ее либо лучшей, либо худшей, т.е. если $\forall i$ либо $\forall b \neq a \; aP_ib$, либо $\forall b \neq a \; bP_ia$.

<u>Лемма 2 (об экстремальной альтернативе).</u> Экстремальная альтернатива a и в коллективном предпочтении тоже займет либо первое, либо последнее место, т.е. если a – экстремальна, то либо $\forall b \neq a \; aPb$, либо $\forall b \neq a \; bPa$.

В этой лемме уже содержится шокирующий факт. Если часть общества считает данную альтернативу самой лучшей, другая часть – самой худшей, то коллективное мнение должно бы по идее поставить эту альтернативу куда-нибудь в середину, находя определенный компромисс. Но этого не происходит.

Доказательство. Обозначим за M множество избирателей, считающих a лучшей альтернативой. Рассмотрим произвольную альтернативу $b \neq a$. Заметим, что избиратели, считающие a лучшей ставят a над b, а считающие худшей – ставят b над a, то есть $V\left(a, b; \vec{P}\right) = M$ и никак не зависит от b. Следовательно, для произвольных альтернатив b и c, не совпадающих с a, имеем $V\left(a, b; \vec{P}\right) = V\left(a, c; \vec{P}\right)$.

По лемме о нейтральности либо одновременно aPb и aPc, либо bPa и cPa, либо $b \sim a$ и $c \sim a$, то есть в коллективном решении все альтернативы либо одновременно лучше а, либо одновременно хуже *a*, либо одновременно эквивалентны *a*. В первом случае *a* – худшая альтернатива, во втором – лучшая. Можно также показать, что третий случай невозможен. Более того, при сделанных предположениях коллективное предпочтение тоже обязано быть линейным, а не только слабым порядком.

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Доказательство. Рассмотрим серию профилей, отличающихся друг от друга только мнением избирателей об альтернативе *a*: в первом профиле все считают *a* лучшей альтернативой, во втором – участник 1 считает *a* худшей, остальные – лучшей, в третьем *a* – худшая альтернатива по мнению участников 1 и 2. И так далее. В последнем (n+1)-профиле все будут считать *a* наихудшим выбором.

По аксиоме единогласия *a* будет лучшей альтернативой в первом случае, худшей – в последнем, а по лемме об экстремальной альтернативе – или лучшей, или худшей во всех остальных случаях. Поэтому в какой-то момент *a* за один шаг из лучшей альтернативы становится худшей (возможно, это происходит несколько раз, но мы возьмем первый такой момент, и для нас важно, что он обязательно существует). Случится это при смене предпочтений ровно одного участника, которого обозначим *d*. Приведенное рассуждение показывает, что *d* может навязать свое мнение всему коллективу, но пока только по поводу конкретной экстремальной альтернативы и в конкретных обстоятельствах. Наметим путь доказательства того, что для любых альтернатив *b* и *c* из bP_dc следует bPc.

Итак, пусть *b* и *c* – произвольные альтернативы и bP_dc. Поскольку по условию независимости от посторонних альтернатив решение относительно *b* и *c* не зависит от третьей альтернативы *a*, то достаточно предъявить профиль $\vec{P}^{(1)}$ с тем же самым множеством $W = V\left(b, c; \vec{P}^{(1)}\right) = V\left(b, c; \vec{P}\right)$, в котором $bP^{(1)}c$ – в этом случае мы заключим, что и bPc тоже. А именно, рассмотрим профиль $\vec{P}^{(1)}$, в котором для всех участников, кроме *d*, альтернатива *a* экстремальна, и последние ранжируют ее так же, как и при выборе диктатора. Диктатор же (то есть пока просто участник *d*) в профиле $\vec{P}^{(1)}$ считает *a* промежуточной альтернативой между *b* и *c*.

Для доказательства следует рассмотреть два вспомогательных профиля $\vec{P}''$ и $\vec{P}'$, отличающихся от $\vec{P}^{(1)}$ только предпочтениями *d*. В первом из них участник *d* считает а лучшей альтернативой, а во втором – наоборот, худшей. После этого рассуждение практически повторяет доказательство леммы о нейтральности.

Возможные подходы к разрешению проблемы

Как показали предыдущие разделы, ни одно из предложенных правил голосования не является однозначно «хорошим». Более того, идеального правила и быть не может. В то же время какое-то разрешение проблемы требуется достаточно часто. Сформулируем некоторые компромиссные подходы.

Первым подходом, имеющим ограниченное применение (и, как правило, воспринимаемым не очень серьезно), является переход к вероятностным правилам голосования. Таковым, например, является «правило случайного диктатора» – вероятностная версия относительного большинства, в которой доминирующей стратегией является указать наилучшего для себя кандидата. Конечно, серьезные вопросы нереально решать с помощью правила, для которого не выполняется Парето-эффективность. Однако многократно повторяемые процедуры можно в некоторых случаях решать именно так.

Второй, более серьезный подход связан с ограничением области предпочтений. В частности, для однопиковых предпочтений проблема коллективного выбора является разрешимой. Если альтернативы можно упорядочить так, что полезность каждого избирателя сначала монотонно возрастает до некоторого уровня, а затем монотонно убывает, то при голосовании побеждает альтернатива, поддержанная медианным избирателем.

Упорядочение не обязательно должно существовать изначально. В некоторых случаях можно придумать порядок, при котором предпочтения окажутся однопиковыми. Например, политические партии можно упорядочить в соответствии с их отношением к экономическим свободам. Исследования Алексея Захарова [7], выполненные на основе данных опроса Всероссийского центра изучения общественного мнения (ВЦИОМ) 2007 г., продемонстрировали следующую последовательность: КПРФ[1] – (–1,59), СР[2] – (–0,87), ЕР[3] – 0,30, ЛДПР[4] – 0,69, СПС[5] – 1,14. То есть пришедший на выборы сторонник рынка скорее проголосует за кандидата от «Справедливой России», нежели за коммуниста, а коммунист за единоросса против кандидата от СПС. Правда, здесь проблема коллективного выбора сохраняется из-за многомерности шкалы предпочтений: мнения людей различаются не только по отношению к экономическим свободам, но и касательно политических свобод, религии, экологии и многих других вопросов.

Еще один интересный факт состоит в однопиковости предпочтений московских футбольных фанатов: среди трех команд «ЦСКА», «Локомотив» и «Спартак» именно «Локомотив» является медианой, т. е. подавляющее большинство фанатов «ЦСКА» в матче «Локомотив» – «Спартак» будут болеть за «Локомотив», равно как и большинство фанатов «Спартака» в матче «Локомотив»–«ЦСКА», что обеспечивает железнодорожникам усиленную (вплоть до двойной!) поддержку трибун.

Это подтверждается и эмпирически. Если взять данные за последние 18 лет с 2000 по 2018 гг., мы увидим, что в турнире трех команд «Локомотив» ни разу не выступил хуже, чем в чемпионате в целом, зато 8 раз выступил лучше. При этом дважды (в 2005 и 2006 гг.), будучи худшей из трех команд в чемпионате, оказался первым в группе из трёх.

Третьим возможным выходом будет использование в любых ситуациях методов, для которых издержки невыполнения ряда требований оказываются наименьшими. Строго гарантировать выполнение всех требований, конечно, не получится ни для одного метода, но особенности реального политического пространства таковы, что в подавляющем большинстве ситуаций они все-таки дают адекватные результаты.

Таким примером является «метод разъезженного пути», разработанный

[1] Коммунистическая партия Российской Федерации
[2] Партия «Справедливая Россия»
[3] Партия «Единая Россия»
[4] Либерально-демократическая партия России
[5] Фракция «Союз правых сил»

М. Шульце в 1997 г., широко разошедшийся в сетевых кругах и опубликованный в 2011 г. [8]. Развернутое его описание и анализ впервые были представлены Н. Тайдманом в 2006 г. [9].

Метод Шульце использует всю информацию о предпочтениях избирателей относительно каждой пары кандидатур. Избиратели указывают в бюллетене предпочтения относительно кандидатур: 1 – наиболее желаемый кандидат, 2 – второй по предпочтительности и т. д. Разрешается ставить одинаковые числа нескольким кандидатурам. Более того, разрешается вообще не заполнять поле для части кандидатур. В таком случае считается, что они одинаково хуже всех, для которых указано число. Таким образом, несмотря на кажущуюся сложность, метод обрабатывает и привычные для избирателей «галочки» напротив одного из кандидатов – отмеченный кандидат считаются наилучшим, а все остальные равноценно плохими.

Обработка начинается с того, что для каждой пары вычисляется значение $d(X,Y)$ – число избирателей, строго предпочитающих кандидата X кандидату Y. Далее алгоритм ищет все пути от кандидата A до кандидата B, такие, что при парном сравнении каждый последующий кандидат проигрывает предыдущему. Формально в методе Шульце путем силы p от A до B называется последовательность кандидатов $C(1),\ldots,C(k)$ со свойствами:

1. $C(1)=A$, $C(k)=B$.
2. $d(C(i),\text{v}C(i+1)) > d(C(i+1),\text{v}C(i)), \quad i=1,\ldots,k.$
3. $p=\min d(C(i), C(i+1))$.

Если пути от кандидата A к кандидату B не существует, то $p(A, B) = 0$. В противном случае находим путь с максимальной силой $p(A, B)$. Победителем становится кандидат A, такой что $p(A, B) \geq p(B,A)$ для каждого кандидата B. Для реализации метода Шульце требуются серьезные вычисления, однако с развитием компьютеров его использование становится возможным.

Покажем, как работает метод Шульце на данных из примера, представленного в работе Кондорсе. Представим эти данные в форме профилей предпочтений избирателей (рис.10) и в форме мажоритарного турнира (рис.11). Очевидно, что победителя здесь не будет – наблюдаем цикл Кондорсе.

23	**17**	**2**	**10**	**8**
A	*B*	*B*	*C*	*C*
B	*C*	*A*	*A*	*B*
C	*A*	*C*	*B*	*A*

Рис. 10. Профили предпочтений избирателей

	$d(*,A)$	**$d(*,B)$**	**$d(*,C)$**
$d(A,*)$		33	25
$d(B,*)$	27		42
$d(C,*)$	35	18	

Рис. 11. Мажоритарный турнир избирателей

Построим пути от каждого кандидата к каждому. Например, кандидат *A* выигрывает у кандидата *B* напрямую со счетом 33:27, а кандидату *C* проигрывает. Однако можно построить последовательность $A \succ B$ (33:27), $B \succ C$ (42:18). Таким образом, кандидат *A* может победить кандидата *C*, причем самый слабый переход (выделенный жирным шрифтом) – это победа 33 голосами против 27. Следовательно, сила пути от *A* до *C* равна 33. Аналогичную процедуру проведем для всех остальных пар и результаты сведем на рис.12.

	к *A*	**к *B***	**к *C***
от *A*		*A*-**33**-*B*	*A*-**33**-*B*-42-*C*
от *B*	*B*-42-*C*-**35**-*A*		*B*-**42**-*C*
от *C*	*C*-**35**-*A*	*C*-35-*A*-**33**-*B*	

Рис. 12. Пути кандидатов

Сравним силы путей от каждого кандидата до каждого в прямом и обратном направлении. Получим, что $B \succ A$ (35:33), $B \succ C$ (42:33), $C \succ A$ (35:33). Соответственно, получаем следующую, итоговую ранжировку кандидатов: $B \succ C \succ A$. Заметим, что это полностью совпадает с разрывом самой слабой связи $A \succ B$ (33:27) в цикле Кондорсе: $B \overset{42:18}{\succ} C \overset{35:25}{\succ} A \overset{33:27}{\succ} B$.

Однако и для большего числа кандидатов метод обычно справляется лучше других используемых аналогов.

Рассмотрим пример с 45 избирателями и 5 кандидатами. Данные снова представим в виде профилей предпочтений (рис.13) и в виде мажоритарного турнира (рис.14):

5	**5**	**8**	**3**	**7**	**2**	**7**	**8**
A	*A*	*B*	*C*	*C*	*C*	*D*	*E*
C	*D*	*E*	*A*	*A*	*B*	*C*	*B*
B	*E*	*D*	*B*	*E*	*A*	*E*	*A*
E	*C*	*A*	*E*	*B*	*D*	*B*	*D*
D	*B*	*C*	*D*	*D*	*E*	*A*	*C*

Рис. 13. Профили предпочтений избирателей

	***d*(*,*A*)**	***d*(*,*B*)**	***d*(*,*C*)**	***d*(*,*D*)**	***d*(*,*E*)**
***d*(*A*,*)**		20	26	30	22
***d*(*B*,*)**	25		16	33	18
***d*(*C*,*)**	19	29		17	24
***d*(*D*,*)**	15	12	28		14
***d*(*E*,*)**	23	27	21	31	

Рис. 14. Мажоритарный турнир избирателей

Результаты поиска наилучших путей от каждого кандидата к каждому сведем на рис.15.

	к *A*	**к *B***	**к *C***	**к *D***	**к *E***
от *A*		30 **28** 29 $A \succ D \succ C \succ B$	30 **28** $A \succ D \succ C$	**30** $A \succ D$	30 28 **24** $A \succ D \succ C \succ E$
от *B*	**25** $B \succ A$		33 **28** $B \succ D \succ C$	**33** $B \succ D$	33 28 **24** $B \succ D \succ C \succ E$
от *C*	29 **25** $C \succ B \succ A$	**29** $C \succ B$		**29** 33 $C \succ B \succ D$	**24** $C \succ E$
от *D*	**28** 29 25 $D \succ C \succ B \succ A$	**28** 29 $D \succ C \succ B$	**28** $D \succ C$		28 **24** $D \succ C \succ E$
от *E*	31 28 29 **25** $E \succ D \succ C \succ B \succ A$	31 **28** 29 $E \succ D \succ C \succ B$	31 **28** $E \succ D \succ C$	**28** $D \succ C$	

Рис. 15. Результаты поиска наилучших путей для каждого кандидата

Осуществим сравнение силы путей от каждого кандидата до каждого в прямом и обратном направлении и выявим победителя:

$E \succ A$ (25:24), $E \succ B$ (28:24), $E \succ C$ (28:24), $E \succ D$ (31:24).
$A \succ B$ (28:25), $A \succ C$ (28:25), $A \succ D$ (30:25).
$C \succ B$ (29:28), $C \succ D$ (29:28).
$B \succ D$ (33:28).

Таким образом, итоговый результат имеет вид: $E \succ A \succ C \succ B \succ D$.

У метода Шульце есть свои преимущества и недостатки. Метод Шульце не удовлетворяет ряду представленных выше требований, в частности, требованию независимости от посторонних альтернатив и требованию участия. Однако, как доказал Кеннет Эрроу, метода, удовлетворяющего всем разумным требованиям, не существует, а для метода Шульце «плохие ситуации» реализуются относительно редко [9].

Для реализации представленного алгоритма требуются достаточно серьезные вычисления, однако с развитием компьютеров и математических методов (в частности, динамического алгоритма Флойда – Уоршелла для нахождения кратчайших расстояний между вершинами взвешенного ориентированного графа) его использование становится возможным.

Метод Шульце не интуитивен, он зачастую представляется неким черным ящиком, магическим образом выдающим результаты. Однако требования, накладываемые на профили предпочтений, невелики, при этом избиратель в состоянии сам выбирать, какую часть информации о своем отношении к кандидатам делать публичной. Неинтуитивность же метода в существенной степени затрудняет стратегическое поведение избирателей, что в данном случае является преимуществом.

Метод Шульце пока не применяется на общеполитических выборах, в том числе из-за консервативности общества. Однако он набирает популярность в корпорациях (в том числе при выборе состава совета директоров), при принятии решений рядом политических партий и общественных организаций, а также в рабочих группах частных компаний. Например, метод Шульце уже зарекомендовал себя в программистской среде при тестировании программного обеспечения, в том числе в компании Microsoft, а также при принятии решения о включении музыкальных композиций в ротацию на канале MTV.

Список источников / References

1. Филатов А.Ю. Неоднородность и ее учет при принятии экономических решений. Иркутск: ИГУ. – 2013.
2. Condorcet M. Essay on the Application of Analysis to the Probability of Majority Decisions. – Paris: Imprimerie Royale. – 1785.
3. Borda J. Mémoire sur les élections au scrutin. – Paris: Histoire d l'Academie Royale des Sciences. – 1781.
4. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир. – 1991.
5. Arrow K. Social Choice and Individual Values. – Wiley. – 1951.
6. Geanakoplos J. Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem // Economic Theory. – 2005. – Т.26. – №1. – С.211–215.
7. Захаров А.В. Выборы в Государственную Думу 2007 г.: значимость идеологических предпочтений россиян // М.: ГУ ВШЭ. – 2008. – WP7/2008/01.

8. Schulze M. A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method // Social Choice and Welfare. – 2011. – V.36(2). – C.267–303.
9. Tideman N. Collective Decisions and Voting: The Potential for Public Choice. – Burlington: Ashgate. – 2006.

Сведения об авторах / About authors

Савватеев Алексей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор Московского физико-технического института, ведущий научный сотрудник лаборатории математической экономики Центрального экономико-математического института РАН, ведущий научный сотрудник Российской экономической школы, заместитель руководителя Кавказского математического центра, ректор Университета Дмитрия Пожарского. 117418 Россия, г. Москва, Нахимовский проспект, 47. *E-mail: hibiny@mail.ru*
Alexey V. Savvateev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow Institute of Physics and Technology, Leading Researcher, the Laboratory of Mathematical Economics, Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Leading Researcher, New Economic School, Deputy Head, Caucasus Mathematical Center, President of Dmitry Pozharsky University. 47 Nakhimovsky Prospect, Moscow, Russia 117418. *E-mail: hibiny@mail.ru*

Филатов Александр Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, научный руководитель Научно-исследовательской лаборатории моделирования социально-экономических процессов, Школа экономики и менеджмента, Дальневосточный федеральный университет. 690920 Россия, г. Владивосток, о-в Русский, кампус ДВФУ, корпус G, каб. G335. *E-mail: filatov.aiu@dvfu.ru*
Aleksander Yu. Filatov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Scientific Director, the Research Laboratory of Modeling Socio-Economic Processes, School of Economics and Management, Far Eastern Federal University. Office G335, building G, FEFU campus, Russky Island, Vladivostok, Russia 690920. *E-mail: filatov.aiu@dvfu.ru*

Дмитрий Александрович Шварц, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Высшей школы экономики, доцент Кавказского математического центра, доцент Университета Дмитрия Пожарского. 117418 Россия, г. Москва, Нахимовский проспект, 47. *E-mail: dshvarts@mail.ru*
Dmitry A. Schwartz, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, New Economic School, Associate Professor, Caucasus Mathematical Center, Associate professor, Dmitry Pozharsky University. 47 Nakhimovsky Prospect, Moscow, Russia 117418. *E-mail: dshvarts@mail.ru*

Адрес сайта в сети интернет: http://jem.dvfu.ru