

Модели экономического влияния рекламы: вторичные эффекты рекламной конкуренции¹

Сергей Вартанов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Информация о статье

Поступила в редакцию:
13.07.2020

Принята
к опубликованию:
12.04.2021

УДК 51–77
JEL C51, C52

Ключевые слова:

экономика рекламы, поведение потребителя, модели рекламной динамики, несовершенная конкуренция, медиа-рекламный рынок

Keywords:

advertising economics, consumer behavior, advertising dynamics models, imperfect competition, media advertising market

Аннотация

Настоящая работа представляет собой четвертую часть цикла из пяти статей, посвященных обзору существующих моделей, методов и взглядов на эффекты воздействия экономического института рекламы на рынок на всех возможных уровнях. В ней продолжается рассмотрение эффектов влияния рекламы промежуточного уровня, связанного с особенностями рекламных стратегий фирм-производителей. В отличие от вторичных эффектов индивидуального характера, связанных с особенностями рыночных стратегий отдельных рекламирующих фирм, рассматриваемые в настоящей работе эффекты рекламной конкуренции связаны с поведением таких фирм в условиях конкурентного окружения. Хотя во многом такие эффекты аналогичны индивидуальным вторичным эффектам, порожденным схожим типом первичного воздействия, существует ряд эффектов, характерных только для конкурентных рынков. В настоящей работе подобные эффекты классифицированы в зависимости от преобладающих первичных эффектов (статические/вневременные, кратко- и долгосрочные) и для каждого класса приведен анализ описывающих соответствующий рынок статических и динамических моделей рыночного равновесия.

Models of the Economic Impact of Advertising: Spillovers from Advertising Competition

Sergey Vartanov

Abstract

The article is the fourth part of a series of five articles devoted to a review of existing models, methods, and views on the effects of the economic institution of advertising on the market at all possible levels. It continues to consider the effects of the influence of intermediate-level advertising associated with the characteristics of advertising strategies of manufacturing firms. In contrast to the secondary effects of an individual nature associated with the characteristics of the market strategies of individual advertising firms, the effects of advertising competition considered in this paper are associated with the behavior of such firms in a competitive environment.

¹ Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-68-47030)
DOI: <https://dx.doi.org/10.24866/2311-2271/2021-2/99-121>

The article is the fourth part of a series of five articles devoted to a review of existing models, methods, and views on the effects of the economic institution of advertising on the market at all possible levels. It continues to consider the effects of the influence of intermediate-level advertising associated with the characteristics of advertising strategies of manufacturing firms. In contrast to the secondary effects of an individual nature associated with the characteristics of the market strategies of individual advertising firms, the effects of advertising competition considered in this paper are associated with the behavior of such firms in a competitive environment. While in many ways these effects are analogous to individual spillovers generated by a similar type of primary exposure, there are a few effects that are specific only to competitive markets. In this paper, such effects are classified according to the prevailing primary effects (static / timeless, short- and long-term) and for each class an analysis of static and dynamic models of market equilibrium describing the corresponding market is given.

Введение. Многоуровневая классификация эффектов рекламы как экономического института

В основе экономических эффектов лежит воздействие рекламы на потребителя и последующее изменение его поведения, затрагивающих весь рынок в целом и изменяющих исход рыночного взаимодействия. Для фирм сама по себе реклама не является ни продукцией, ни фактором производства, а расходы на нее можно отнести скорее к транзакционным издержкам (она «приводит» потребителя к производителю, обеспечивая сделку между ними). Возможности рекламы по влиянию на поведение потребителей делают ее важным инструментом в руках фирм, которые рассматривают ее как часть своей рыночной стратегии. Появление таких инструментов приводит к следующему уровню влияния рекламы на рынок: она трансформирует поведение фирм по сравнению с тем случаем, когда они лишены возможности влиять на предпочтения потребителей. Рекламинирующая фирма не выступает в роли «получателя потребительских предпочтений», а в некоторой степени может управлять ими. Итогом влияния рекламы на участников рынка является изменение свойств рыночного равновесия, с которым связан более высокий уровень влияния рекламы как экономического института. Таким образом, можно выделить три основных группы вопросов, на которые отвечает экономическая теория рекламы. Первая группа связана с оценкой влияния рекламы на поведение потребителей: как меняется способ принятия экономических решений и к каким изменениям в спросе он приводит. Вопросы из второй группы связаны с поведением рекламодателей – фирм и посредников: что можно считать «рекламной стратегией фирмы», как эти стратегии позволяют фирме «управлять» спросом и какие из них можно считать оптимальными в зависимости от особенностей товара, возможностей фирмы и т.п. Наконец, третья группа вопросов связана с влиянием рекламы как экономического института на рынок: выигрывает ли общество от появления в руках фирм рекламных инструментов, какие новые типы экономических агентов возникают благодаря появлению рекламы и какие варианты взаимодействия возможны между ними и «старыми» типами субъектов рынка.

Настоящая работа является частью цикла статей, посвященных всестороннему обзору и систематизации эффектов, оказываемых на рынок рекламой как экономическим институтом. В предыдущих статьях была проведена общая классификация эффектов с разделением их на описанные уровни и подробно обсуждены первичные эффекты и вторичные эффекты индивидуального уровня, а настоящая работа посвящена вторичным эффектам конкурентного уровня и имеет следующую структуру. В первом разделе кратко описывается общий подход к моделированию вторичных эффектов – единый для индивидуального и конкурентного уровня. В разделе 2 обсуждаются статические вторичные эффекты

рекламной конкуренции, а раздел 3 посвящен динамически изменяющимся эффектам и эффектам, зависящим от времени. Среди этих эффектов выделяются эффекты кратко- и долгосрочного действия – в зависимости от типа преобладающих первичных эффектов, порождающих их. Раздел 4 посвящен краткому обзору медийно-зависимых вторичных эффектов, а раздел 5 представляет собой заключение.

Вторичные эффекты индивидуального и конкурентного уровня: общие подходы к моделированию

Как уже говорилось в предыдущих работах цикла, совокупный спрос потребителей зависит от интенсивности рекламного воздействия, определяемого в значительной мере затратами фирмы на рекламу своего товара, а также структурой их распределения по различным типам рекламы и медиаканалам. Общая стратегия фирмы помимо рекламы может включать в себя и другие компоненты, например, цену или объем производимой продукции. Задача фирмы в такой постановке представляет собой задачу максимизации прибыли за счет выбора общей стратегии, состоящей как из рекламных, так и из нерекламных компонентов. Такая задача во многом родственна задачам медиапланирования. При их решении фирма так же определяет совокупность своих каналов коммуникации, бюджет рекламной кампании и целевые показатели эффективности рекламы по каждому виду активности, например, частоту рекламных сообщений в каждом медиаканале.

В зависимости от длительности эффекта рекламного воздействия, типа и долгосрочности потребления товаров, в качестве целевой функции для фирм рассматривается либо краткосрочная прибыль, либо приведенная прибыль за все время планирования. Краткосрочная прибыль рекламирующей фирмы имеет вид

$$\pi_i(\mathbf{p}; \mathbf{A}; Z) = p_i \cdot D_i(\mathbf{p}; \mathbf{A}; Z) - C_i(D_i(\mathbf{p}; \mathbf{A}; Z)) - \varphi_i(A_i) \rightarrow \max_{p_i, A_i}$$

где $\mathbf{p} = (p_i, p_{-i})$ – вектор цен на товары (p_i – управляемая фирмой цена на ее товар, p_{-i} – цены на товары конкурентов), $\mathbf{A} = (A_i, A_{-i})$ – совокупность рекламных стратегий производителей (A_i – стратегия самой фирмы, A_{-i} – стратегии конкурентов), $C_i(\cdot)$ – функция полных затрат фирмы i , $\varphi_i(\cdot)$ – функция рекламных затрат в зависимости от выбранной стратегии A_i (так, если в качестве стратегии выступает объем расходов на рекламу, то $\varphi_i(x) \equiv x$), $D(\cdot)$ – функция спроса, а Z – вектор параметров рынка, неподконтрольных фирмам.

Если рекламное воздействие носит долгосрочный характер, реклама, сделанная в прошлые периоды, влияет на предпочтения потребителей и в последующие периоды. Таким образом, все рынки, где потребители сохраняют и запоминают опыт предыдущего потребления товара и рекламы, являются динамическими и включают в себя в явном виде время. В этом случае каждая фирма максимизирует интегральный функционал вида

$$J_i(\mathbf{p}(\cdot), \mathbf{A}(\cdot)) = \int_0^T \{p_i(t) \cdot S_i(t) - C_i(S_i(t)) - \phi_i(A_i(t))\} e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_{\mathbf{p}(\cdot), \mathbf{A}(\cdot)}$$

где $p_i(t)$ – мгновенное значение цены на товар фирмы i , $A_i(t)$ – ее рекламная стратегия в момент времени t , а $S_i(t)$ – мгновенное значение продаж товара фирмы i , динамика которого зависит от стратегий фирм (рекламной и, возможно, ценовой) и текущего состояния рынка:

$$\begin{aligned} \dot{S}_i(t) &= f_i(\mathbf{S}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{A}(t), Z(t)) \\ S_i(0) &= S_0 \end{aligned}$$

Входящая в это выражение функция f_i может быть, вообще говоря, любой интегрируемой функцией. Ее свойства полностью определяются особенностями влияния рекламы на совокупный спрос потребителей. Например, наиболее простой вид имеет эта функция в случае краткосрочного рекламного убеждения $f(A, S) = rA(1 - S) - \lambda S$ (модель Видаля-Вольфа). В других случаях ее вид более сложный, вплоть до того, что бывает удобнее записывать динамику доли в виде не одного, а системы уравнений (например, в случае модели Нерлова-Эрроу). Тем не менее, практически все существующие модели рекламной динамики сводятся к данному виду.

Если на целевую функцию фирмы помимо ее самой влияют и стратегии ее конкурентов, то задача определения их оптимальных стратегий приобретает теоретико-игровой характер. В этом случае модель рынка представляется игрой в нормальной форме, в которой игроками выступают рекламирующие фирмы. В краткосрочном случае множествами их стратегий являются множества допустимых значений (p_i, A_i) , вид которых зависит от предположений об их производственных и маркетинговых возможностях, а функциями выигрыша – прибыли $\pi_i(\mathbf{p}, \mathbf{A}, Z)$. Равновесия Нэша в этой игре соответствуют равновесию на изучаемом рынке с рекламой. Если же на рынке действуют долгосрочные эффекты рекламного воздействия, то его модель основана на дифференциальной игре. В ней стратегиями фирм являются векторы управления вида $(p_i(t), A_i(t))$, если фирмы выбирают свои стратегии до начала игры и не могут корректировать их в зависимости от ситуации на рынке, или $(p_i(t, S), A_i(t, S))$ в противном случае. Максимизируемыми критериями в такой дифференциальной игре являются приведенные прибыли вида $J_i(\mathbf{p}(\cdot), \mathbf{A}(\cdot))$. В зависимости от того, какой вид имеют управляющие векторы фирм, рассматривается равновесие в программной форме (open-loop equilibrium, без обратной связи) либо равновесие в форме Маркова (markovian/closed-loop equilibrium, с обратной связью).

Статические вторичные эффекты рекламной конкуренции

Реклама и свойства равновесия

Более сложная, чем монополия, рыночная структура возникает, когда появляются другие фирмы-производители товара. Самый простой вариант такого рынка – это дуополия. Самая простая модель дуопольного рынка, в свою очередь, возникает в том случае, когда цена на товар фиксирована и не подконтрольна фирмам, а «маркетинговых» стратегий у обеих фирм всего две – «рекламировать» и «не рекламировать». В этом случае фирмы выступают ценополучателями, и реклама – единственный доступный им способ влиять на потребительский выбор. В таком случае взаимодействие дуополистов сводится к хорошо изученной в теоретико-игровой литературе Дилемме заключенного. Аналогия возникает из того, что выигрыш фирм записывается в виде матрицы 2x2, учитывающей два предположения: а) прибыль фирмы в случае, если она рекламирует, выше, чем в случае, если она не рекламирует свою продукцию, и б) прибыль обеих фирм в случае, если они вступают в рекламную конкуренцию, ниже, чем в «безрекламном» случае. Исследование подобной «Дилеммы рекламщиков» проводилось в работах Bierman and Fernandez (1998), Nicholson (1995) и Waldman and Jensen (1997). Впрочем, для реального исследования подобные модели представляют весьма невысокий интерес: размеры выигрышей в них предполагаются фиксированными и, вообще говоря, не имеющими отношения к реальным ситуациям экономики.

Более содержательные результаты возникают тогда, когда на рынке появляется дифференциация товара. «Нерекламная» основа для описания рынков данного типа представляет собой, по сути, модель ценовой конкуренции на рынке с дифференциацией товара. В отличие от привычной модели монополистической конкуренции, где товар так же дифференцирован, в качестве рыночной стратегии предприятий рассматривается цена, а не объем производимого товара. В качестве базовой для описания подобных рынков можно использовать модель Шонбека-Коремана (Schoonbeek, Kooreman, 2007). В ней предполагается, что две фирмы, производящие товары-субституты, одновременно и независимо друг от друга выбирают цены на свой товар и затрат на рекламную деятельность. Оба этих элемента стратегии фирм влияют на спрос, который для каждой фирмы убывает по цене на «свой» товар и возрастает по цене на «чужой» (т.к. товары – субституты), кроме того, спрос более чувствителен к цене именно на «свой» товар, чем на товар конкурента. Доминирующие эффекты первичного воздействия имеют убеждающий характер, а интенсивность рекламного воздействия описывается уровнем затрат на рекламу. Это приводит к тому, что спрос на товар каждой фирмы является возрастающей функцией от ее рекламных затрат, кроме того, эта функция предполагается вогнутой – предельная эффективность рекламных вложений убывает с их ростом. Влияние же затрат фирмы на спрос на товар конкурента может быть различным. Если основным первичным эффектом является увеличение заинтересованности в товаре данной категории в целом, то затраты одной фирмы могут привести к увеличению спроса на товар конкурента. В этом случае главным вторичным эффектом рекламного воздействия на данном рынке является повышение благосостояния обеих фирм по сравнению с безрекламным случаем. Если реклама товара носит одновременно и характер антирекламы по отношению к конкуренту, то вторичные ее эффекты зависят от особенностей сочетания рекламных и антирекламных эффектов первичного воздействия. Опишем все эти эффекты математически, построив теоретико-игровую модель дуополии согласно Шонбеку и Кореману.

Пусть первичные эффекты оказывают на спрос q_i на товар фирмы i ($i = 1, 2$) аддитивное воздействие. Функция спроса задается в виде: $q_i = \gamma_{i0} + \alpha_{ii}p_i + \alpha_{ij}p_j + \gamma_{ii}A_i^{1/2} + \gamma_{ij}A_j^{1/2}$, $j \neq i$, где p_i – цена на товар фирмы i , а A_i – затраты этой фирмы на рекламу. Параметр γ_{i0} показывает спрос на товар при нулевой цене и отсутствии рекламы, а затраты на производство товара линейны: $c_i(q_i) = c_i \cdot q_i$. Параметры модели удовлетворяют условиям:

1. $\alpha_{ii} < 0$, $\alpha_{ij} > 0$, $\gamma_{i0} > 0$, $\gamma_{ii} > 0$, $c_i > 0$
2. $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} > 0$
3. $\alpha_{ii} + \frac{1}{4}\gamma_{ii}^2 < 0$; $i = 1, 2$.

Смысл этих условий очевиден: $\alpha_{ii} < 0$ гарантирует убывание спроса по цене на «свой» товар, $\alpha_{ij} > 0$ – то, что товары являются субститутами. Условие 2 означает, что влияние «своей» цены на спрос выше, чем «кросс-товарное» влияние. Условие 3 носит полу-технический характер, оно необходимо для того, чтобы было возможным выполнение условия Дорфмана-Штейнера. Кроме того, воздействие рекламы на спрос предполагается вогнутым (степень $\frac{1}{2}$ по переменным A_i и A_j), что соответствует убыванию предельной эффективности рекламных вложений убывает с их ростом.

В данной модели выигрыш каждого из дуополистов равен разности их прибыли и затрат на рекламу:

$$\pi_i = (p_i - c_i) \left(\gamma_{i0} + \alpha_{ii} p_i + \alpha_{ij} p_j + \gamma_{ii} A_i^{\frac{1}{2}} + \gamma_{ij} A_j^{\frac{1}{2}} \right) - A_i,$$

где $i, j = 1, 2; j \neq i$. Таким образом, для описываемой базовой модели можно ввести игру в нормальной форме, соответствующую описанному взаимодействию фирм-дуополистов. В зависимости от особенностей проводимой рекламной кампании ее эффект на спрос на «чужой» товар (на «свой» товар в рамках базовой модели она оказывает позитивное воздействие). В случае стимулирующего влияния (т.е. реклама повышает спрос на товар в целом, а не только на продукцию данной фирмы; в соответствии с введенными ограничениями $\alpha_{ii} > 0, \alpha_{ij} > 0$) прибыль обеих фирм в рекламном равновесии выше, чем в нерекламном. В случае обратного эффекта (реклама повышает спрос на «свой» товара и одновременно понижает спрос на «чужой»; $\gamma_{ii} > 0, \gamma_{ij} < 0$ при $i, j = 1, 2$ и $j \neq i$) возможны два диаметрально противоположных равновесных исхода – в зависимости от соотношения абсолютных значений параметров α_{ii} и α_{ij} . Один из них возникает, если рекламные кампании фирм ориентированы в основном на продвижение своей продукции и влияние на спрос «дружественной» рекламы значительно сильнее, чем «вражеской» (т.е. $|\gamma_{ii}| > |\gamma_{ij}|$ для обеих фирм). В этом случае для обеих фирм рекламное равновесие оказывается более выгодным, чем нерекламное. В противном случае (эффекты антирекламы сильнее, чем эффекты рекламы; $|\gamma_{ii}| < |\gamma_{ij}|$) прибыль фирм в нерекламном равновесии оказывается ниже, чем в равновесии на рынке без рекламы. В «промежуточных» случаях соотношение прибыли в рекламном и нерекламном равновесии определяется комбинацией трех факторов: уже упомянутого соотношения $|\gamma_{ii}|$ и $|\gamma_{ij}|$, а также отдельно коэффициента «собственного» влияния γ_{ii} и максимального спроса на продукцию каждой фирмы γ_{i0} . При этом для равновесных выпусков и цен, назначаемых фирмами за свою продукцию, характерны аналогичные соотношения.

Рынки несовершенной конкуренции: реклама и барьер входа

Статические вторичные эффекты рекламного воздействия возникают и при выходе на рынок новой фирмы. Как уже говорилось в предыдущем разделе, на таких рынках возникают два основных типа вторичных эффектов рекламы: «подрывной», при котором реклама «помогает» фирме-новичку, и «блокирующий», где фирмы-старожилы, пользуясь рекламными инструментами, делают для новичка вход на рынок невыгодным.

Классический подход к анализу таких эффектов связан со сравнением характеристик равновесий в случае наличия на рынке N фирм-старожилых и в случае $N + 1$ фирм с учетом «новичка». Подобный подход применялся Ишигаки (Ishigaki, 2000), а также Каббином и Домбергером (Cubbin and Domberger, 1988). Результат такого сравнения соответствует аналогичному результату для безрекламных рынков: вхождение на рынок новой фирмы снижает цены и прибыль «старожилых». Им, в свою очередь, выгодно установить «ценовой барьер»: повысить цены на свой товар, чтобы новичку было невыгодно входить на рынок. В этом случае равновесным поведением фирм-«старожилых» является построение аналогичного «информационного барьера»: избыточное (относительно ситуации без «новичков») вложение в рекламу с целью дезинформации «новичков» и блокирования их входа на рынок.

Другой подход к анализу вхождения на рынок с рекламой фирм-новичков – моделировать взаимодействие фирм как позиционную игру из нескольких шагов, связанных с выбором рекламных стратегий. Подобный метод применялся,

например, в работе Кузманович и соавторов (Kuzmanović et al, 2011), где рассматривалась позиционно-игровая модель вхождения новой фирмы на (изначально) монопольный рынок.

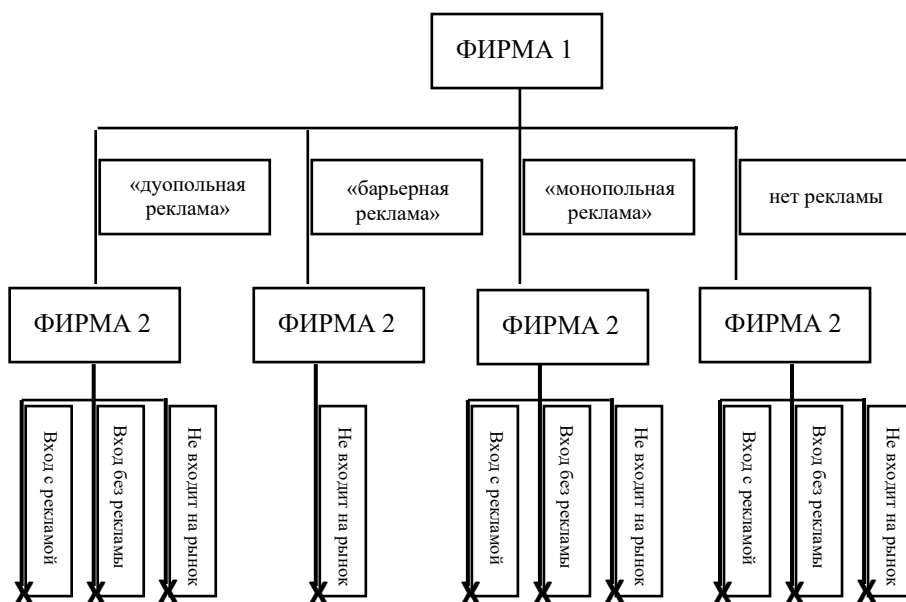


Рис. 1. Позиционная форма игры «Вхождение фирмы на рынок с рекламой»
Источник: составлено автором

Рыночное взаимодействие представляет собой трехшаговую игру (рис. 1): на первом шаге действующая фирма определяет уровень своих затрат на рекламу из четырех возможных схем: отсутствие рекламы, максимизирующая свою прибыль (без учета конкурента) реклама, «барьерная» реклама (уровень рекламных затрат, минимизирующий прибыль конкурента), а также равновесный уровень рекламных затрат с учетом возможных действий конкурента. На втором шаге ход делает фирма-новичок, выбирая один из трех вариантов – не входить на рынок, входить без рекламы (затраты на рекламу нулевые) или входить на рынок и рекламировать свой товар. На третьем шаге после того, как обе фирмы выберут свои рекламные стратегии, либо между ними происходит объемная конкуренция в соответствии с моделью Курно (если вторая фирма входит на рынок), либо фирма-старожил решает задачу поиска оптимальной стратегии монополии, а фирма-новичок не участвует во взаимодействии.

В многошаговых моделях входа на рынок товар предполагается бесконечно делимым и дифференцированным. Потребители характеризуются выбором набора из двух товаров с объемами, равными q_1 и q_2 для первой и второй фирм-производителей соответственно. Предпочтения репрезентативного потребителя описываются квазилинейной функцией полезности, имеющей вид

$$U(q_1, q_2, p_1, p_2) = a_1 q_1 + a_2 q_2 - \frac{1}{2} (b_1 q_1^2 + 2\gamma b_1 b_2 + b_2 q_2) - p_1 q_1 - p_2 q_2,$$

где a_i – резервная цена на товар фирмы i с точки зрения репрезентативного потребителя, b_i – показатель влияния на спрос «своей» цены, а γ – показатель «взаимозаменяемости» товаров. В самом простом случае, когда товары являются

абсолютными субститутами, $a_1 = a_2 = a, b_1 = b_2 = b = \gamma$. Таким образом, обратная функция спроса на продукцию фирмы $i = 1, 2$ имеет вид $p_i = a_i - b_i q_i - \gamma q_j$. В базовой модели рассматривается простейший случай, когда товары являются абсолютными субститутами, то есть $a_1 = a_2 = a, b_1 = b_2 = b = \gamma$.

Влияние рекламы на спрос описывается через изменение резервной цены на товар -й фирмы после проведения рекламной кампании, она равна $a_i = a + A_i + \rho A_j$, что соответствует изменению полезности от потребления набора товаров (q_1, q_2) с $U(q_1, q_2) = (q_1 + q_2)a$ на $U(q_1, q_2) = (a + A_1 + \rho A_2)q_1 + (a + A_2 + \rho A_1)q_2$. Подобная предпосылка соответствует убеждающему характеру рекламного воздействия: она не добавляет новых характеристик товаров, от которых бы зависела полезность, но изменяет характер зависимости полезности от существующих характеристик (в базовой модели это объем потребления каждого товара). Показатель A_i характеризует индуцированное «своей» рекламой прирост готовности платить за товар -й фирмы, в то время как A_j характеризует влияние на нее «чужой» рекламы. Показатель ρ характеризует «экстерналии» рекламного воздействия каждой из фирм. Если он положителен, то реклама носит кооперативный характер, и фирмы «помогают» друг другу рекламой; если он равен нулю, то реклама одного товара никак не влияет на спрос на второй; а если $\rho < 0$, то реклама одного товара одновременно является антирекламой второй.

Издержки каждой из фирм на производство товара предполагаются нулевыми, таким образом, ее затраты определяются только рекламой. Эффективность рекламных вложений, как и в случае прочих моделей рынков с возможностью рекламы, предполагается убывающей, что приводит к вогнутости реакции потребителей на рекламные затраты фирм: $A_i \sim \sqrt{c_A}$. В базовой модели рекламная стратегия фирм представляет собой выбор желаемого уровня A_i влияния на спрос, поэтому их полные затраты составляют $c_i(A_i) = \frac{v}{2} A_i$.

Так как многошаговая модель предполагает полную информированность фирм о решениях, принятых на предыдущих шагах (т.е. это позиционная игра с полной информацией), то ее решением является совершенное подыгровое равновесие (СПР), которое находится с помощью обратной индукции: сначала находится равновесие в объемах товара на моно-/дуопольном рынке для каждой возможной пары рекламных стратегий фирм, после чего с помощью алгоритма Куна находится СПР всей игры.

Главным показателем, определяющим итоговый вид совершенного подыгрового равновесия, является показатель ρ . Если фирмы проводят чистую антирекламу товара, то этот показатель равен -1. В зависимости от особенностей спроса и эффективности вложений в рекламу (а именно, от значения произведения bv), СПР имеет разный вид: если показатель bv невелик (не более $3 + \sqrt{13} \approx 6,6$), то в равновесии фирма-старожил вкладывается в рекламу и блокирует вход на рынок новичка и рынок остается монопольным, а в случае более высокого значения в равновесии вторая фирма входит на рынок, при этом обе фирмы совершают существенные вложения в рекламу. Для случая независимой рекламы двух товаров ($\rho = 0$) равновесный исход также зависит от значения bv : если оно невелико (меньше 1,8), то вторая фирма не входит на рынок, в то время как фирма-старожил осуществляет вложения в рекламу. При высоком значении bv новичок входит на рынок, и обе фирмы осуществляют рекламное воздействие. Наконец, при поддерживающей рекламе ($\rho = 1$) фирма-старожил в равновесии не блокирует вход новичку, и они оба инвестируют в рекламу.

Таким образом, позиционные модели рынка с рекламой являются наиболее подходящим инструментом для анализа однопериодного взаимодействия,

связанного со входом на рынок нового участника. В работе Kuzmanovic et al. (2011) получен и обобщенный вариант приведенного выше результата. Так, вход новой фирмы на рынок тем более вероятен, чем дороже обходится реклама и/или чем выше эластичность спроса по цене. Влияние стоимости рекламы очевидно – чем она выше, тем больше приходится затрачивать на продвижение товара и тем ниже прибыль фирмы-старожила. Рост эластичности спроса по цене (в условиях введенных обозначений за это отвечает рост параметра b) означает, что спрос становится все более «пологим», поэтому один и тот же объем затрат фирмы-старожила на рекламу оказывает все меньшее влияние равновесный объем продукции конкурента. Кроме того, пороговое значение bv , при котором вход на рынок для фирмы-новичка становится выгодным, растет при увеличении «дружественности» рекламы к товару конкурента (что соответствует росту параметра ρ). Так, наибольшее значение порога достигается при абсолютной антирекламе, при независимой рекламе оно значительно ниже, а при поддерживающей рекламе фирме-старожила в принципе невозможно заблокировать с помощью рекламы вход новичка на рынок.

Долгосрочные вторичные эффекты: общие подходы к исследованию

На рынках, допускающих накопление потребительского опыта, реклама, сделанная в прошлые периоды, оказывает заметное влияние на спрос в последующие периоды. Кроме того, действия фирм в прошлом влияют и на их будущие стратегии. Таким образом, все модели рынков, где потребители сохраняют и запоминают опыт предыдущего потребления товара и рекламы, являются динамическими и включают в себя в явном виде время.

Для таких рынков можно выделить общие базовые принципы их исследования и построения моделей функционирования. Во-первых, стратегией фирм-участников рынка является выбор уровня рекламного воздействия (или уровней, если рекламных инструментов у них несколько). Рекламные стратегии всех фирм в целом задают вектор продаж всех товаров, на основании которых определяются прибыли фирм. Во-вторых, цены на товар либо не исследуются в принципе (мгновенный объем продаж предполагается равновесным и цены задаются в неявном виде), либо являются частью стратегий фирм. Иными словами, при фиксированных рекламных компонентах стратегий взаимодействие фирм описывается динамической моделью ценовой конкуренции.

Третьим базовым принципом является постановка задачи каждой из фирм. Фирмы максимизируют интегральный функционал приведенной прибыли на временном интервале $[0, T]$, который в общем виде задается как

$$J_i(\mathbf{p}(\cdot), \mathbf{A}(\cdot)) = \int_0^T \{p_i(t) \cdot s_i(t) - c_i(s_i(t)) - \phi_i(A_i(t))\} e^{-\delta t} dt$$

где T – горизонт планирования (может быть и бесконечным) $p_i(t)$ – мгновенное значение цены на товар фирмы i , $A_i(t)$ – ее рекламная стратегия в момент времени t , $s_i(t)$ – мгновенное значение продаж товара фирмы i , динамика которого описывается дифференциальным уравнением вида (по сути, это ограничения для возникающей задачи оптимального управления):

$$\begin{aligned} \dot{S}_i(t) &= f_i(\mathbf{p}(t), \mathbf{A}(t), Z(t)) \\ S_i(0) &= S_0 \end{aligned}$$

В случае олигополистического рынка базовая модель приобретает теоретико-игровой характер, и в качестве ее решения выступают равновесие Нэша как в программной форме (без обратной связи), так и в форме Маркова (с обратной связью).

В том случае, когда рынок функционирует на протяжении какого-либо протяженного временного промежутка, как правило, используется отдельное «временное» измерение для того, чтобы учитывать изменение рекламных стратегий со временем. Это измерение может носить дискретный характер – если предполагается, что фирмы делают свой выбор один раз в фиксированный период (например, раз в месяц, квартал и т.п.). Если в основе правил функционирования рынка лежит предположение, что фирмы могут оперативно реагировать на все изменения рынка и корректировать свои стратегии с любой точностью, либо же планировать свои рыночные действия и рекламные кампании с точностью до самого малого промежутка времени, то время может условно считаться «непрерывным».

Как в случае с дискретным, так и с непрерывным временем первичные эффекты рекламы носят одинаковый характер (независимо от «частоты дискретизации» - шага по временному измерению). Поэтому один и тот же тип рынка (описываемый структурой и особенностями воздействия рекламы) в зависимости от особенностей течения времени (дискретное или непрерывное) описывается одной и той же моделью. При этом модели с дискретным временем в конечном счете сводятся либо к задаче конечномерной оптимизации, либо к позиционной игре с полной информацией, что делает их близкими к статическим игровым моделям. Для исследования вторичных эффектов рекламы для случая непрерывного времени используются модели рынков, основанные на задачах оптимального управления или на дифференциальных играх. В частности, примером первых может служить рынок с фирмой-монополией, которая определяет свою рекламную стратегию в отсутствие конкурентов. В этом случае для описания ее поведения строится модель поиска оптимального управления с дифференцируемой (по времени) функцией выигрыша. Обсуждению эффектов рекламы на таких рынках посвящена предыдущая часть настоящей работы. С другой стороны, если две или более фирмы определяют свои рекламные стратегии на конкурентном рынке, то необходимо формулировать задачу в терминах дифференциальных игр с непрерывным временем. Применение математического аппарата теории оптимального управления в задачах менеджмента и дифференциальных игр в задачах маркетинга хорошо описаны в работах Сетхи и Томпсона (Sethi and Thompson, 1981) и Йоргенсена и Заккура (Jørgensen and Zaccour, 2004) соответственно. В динамических моделях важнейшие переменные состояния, изменяющиеся с течением времени – продажи, рыночные доли, гудвилл брендов и т.п. – как правило, описываются с помощью дифференциальных уравнений или их систем. В работах Эриксона (Erickson, 1995), Фейхтингера и соавторов (Feichtinger et al., 1994) и Сетхи (Sethi, 1977) проведены довольно обширные обзоры динамических моделей рекламы по состоянию на 1995 год. В частности, Эриксон (Erickson, 1995) обсуждает динамические модели, описывающие дифференциальные игры рекламной конкуренции, а в две другие работы фокусируются на подходе, характерном для теории оптимального управления. Дискретные варианты моделей рынков с рекламой, как правило, приводят к тем же результатам, что и их непрерывные аналоги. В частности, ряд работ российских исследователей (Астафьева, 2006; Першин, 2013; Грачева, 2014) посвящен дискретным задачам построения оптимальной рекламной кампании монополии и анализа рекламного поведения фирм на дуопольном рынке в условиях краткосрочных убеждающих первичных эффектов (дискретный аналог постановки моделей Видаля-Вольфа и Сетхи). Полученные ими

результаты во многом соотносятся с результатами решения аналогичных задач в динамической постановке, а в оптимальном поведении фирм и исходе рыночного взаимодействия обнаруживаются те же вторичные эффекты, что и в условиях непрерывного времени.

Долгосрочные вторичные эффекты рекламного воздействия можно разделить в зависимости от преобладающего типа первичных эффектов на два класса: эффекты мгновенной реакции и накопительные эффекты. Вторичные эффекты мгновенной реакции возникают на тех рынках, где поведение потребителей определяется в основном краткосрочными первичными эффектами – поведенческими, убеждающими и т.д. Если предполагается, что преобладающая на рынке реклама носит такой характер, то взаимодействие фирм на нем описывается динамической моделью мгновенной потребительской реакции. Три основных подхода к построению таких моделей носят имена авторов фундаментальных работ в данном направлении: модель Видаля-Вольфа, модель Сетхи (Сети) и модель Ланчестера².

Если основные первичные эффекты рекламы носят долгосрочный характер, то на рынке возникают вторичные эффекты накопительного характера. К ним относятся, например, гудвилл-эффекты и эффект управляемой рекламной диффузии. Особенности долгосрочного планирования фирмами своих стратегий обуславливают класс математических задач, к которым относится задача моделирования эффектов рекламного воздействия для таких рынков – это задачи динамики рынка, основанные на теориях оптимального управления и дифференциальных игр. В качестве моделей, описывающих накопительные вторичные эффекты рекламы, выступают основанные модели, подход к построению которых носит имена М.Нерлова и К.Эрроу, где на поведение потребителя влияет особый показатель - гудвилл, накапливающийся в течение всего времени действия рекламы.

Вторичные эффекты мгновенной реакции. Модели Видаля-Вольфа и Сетхи

Рассмотрим простейший вариант – на рынке действуют две конкурирующие фирмы, выбирающие свои рекламные стратегии с помощью уровня рекламных затрат. Модели подобных рынков являются «олигополистической» модификацией моделей Видаля-Вольфа. При этом особенности первичного рекламного воздействия (в первую очередь, краткосрочность первичных эффектов) остаются теми же, что и в монопольном случае. В каждый момент времени рыночная доля каждой фирмы зависит не только от ее собственной стратегии, но и от действий ее соперника. В качестве исхода рыночного взаимодействия традиционно рассматривают равновесие Нэша (в форме совокупности стратегий поведения) в игре между фирмами-участниками рынка, предполагая, что в любой момент времени игрокам известна полная история динамики. Использование равновесий Нэша в качестве оценки исхода рыночного взаимодействия имеет многочисленные подтверждения на основе анализа эмпирических данных. В частности, Эриксоном (Erickson, 1992) анализировались эмпирические данные о рекламных стратегиях компаний Coca-Cola и PepsiCo для проверки равновесности их реального поведения. Данные по тем же компаниям применялись и в работе Чинтагунты (Chintagunta and Vilcassim, 1992), где на их основе описывалась симуляция равновесий в дуопольной модификации модели Сетхи с полной и с неполной информацией. Эмпирическую проверку равновесий таких типов проводили и Фрухтер и Калиш (Fruchter, Kalish, 1997), согласно их результатам, равновесие в модели с

² Данная модель является, вообще говоря, модификацией модели Видаля-Вольфа для дуопольного рынка.

полной информацией в наибольшей степени приближает реальное поведение фирм.

В симметричном случае (когда параметры обеих фирм одинаковы) на рынке рассматриваемой структуры существует единственное равновесие, свойства которого позволяют описать особенности вторичных эффектов рекламы на подобном рынке. В частности, сокращение стоимости единицы рекламы и повышение отдачи от нее приводит к увеличению количества рекламы – как и в случае монополии. Однако, в отличие от монопольного случая, максимальное значение прибыли в этом случае становится меньше – в силу одинаковости фирм, реклама используется ими исключительно в конкурентных целях и носит «комбативный» характер. Таким образом, не создается «новый» спрос на товар, и фирмы делят один и тот же рыночный «пирог» – поэтому затраты растут при неизменной выручке.

Для асимметричного случая результат аналогичен – существует единственное равновесие Нэша в форме обратного управления, сравнительная статика для которого имеет более сложный вид, однако основные эффекты, характерные для симметричного случая, сохраняются. Формально динамика долей фирм на дуопольном рынке с кратковременным воздействием рекламы описывается в виде (Prasad and Sethi, 2007): $dx_i(t) = \{ \rho_i u_i(x_i(t)) \sqrt{1 - x_i(t)} - \rho_j u_j(x_i(t)) \sqrt{x_i(t)} - k[2x_i(t) - 1] \} + \sigma(x_i(t)) d\xi(t)$, где $x_i(t)$ – рыночная доля фирмы $i = 1, 2$ ($x_1(t) + x_2(t) = 1$). Если $\sigma(x_i(t)) = 0$, то в модели отсутствует стохастическая компонента³. В качестве целевого функционала рассматривается ожидаемая приведенная прибыль обеих фирм, рассчитываемая так же, как и в базовой модели Сетхи:

$$\mathbb{E} \int_0^{\infty} [m_i x_i(t) - c_i(u(t))^2] e^{-r_i t} dt$$

В случае большего числа фирм рынок превращается из дуопольного в «чисто олигополюсный». При этом ряд эффектов по-прежнему сохраняется: из-за особенностей первичных эффектов рекламы оптимальная схема рекламных затрат сохраняет вид, аналогичный оптимальному для монопольного случая, а динамика рыночной доли носит экспоненциальный характер. В случае симметричной олигополии из $n \geq 3$ фирм увеличение коэффициента дисконтирования и показателя реакции на рекламу оказывают негативное влияние как на уровень продаж, так и на уровень оптимальных рекламных затрат (Erickson, 2009a). Иными словами, если олигополист⁴ сталкивается с высоким уровнем оттока потребителей, либо он не слишком уверен в будущем (что моделируется высоким коэффициентом дисконтирования), то он не будет стремиться активно рекламировать свой товар, а продажи его будут сравнительно низкими. Если фирмы-олигополисты различаются, то описанные эффекты в определенном смысле тоже сохраняются. Так, влияние «своих» параметров на поведение фирмы носит такой же характер, как и в симметричном случае. Кроме того, влияние показателей каждой отдельной фирмы на средние рекламные затраты и средние продажи носит точно такой же характер. В то же время, если взять любую пару фирм i и $j \neq i$, то влияние показателей фирмы i на рекламную стратегию и продажи фирмы j носит диаметрально противоположный характер. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что

³ Тогда модель Видаля-Вольфа/Сетхи превращается в один из вариантов модели Ланчестера

⁴ В силу симметричности участника рынка это справедливо для любого из них

эффект от влияния показателей фирмы i на ее поведение существенно более сильный, чем на поведение любой из фирм-конкурентов.

Модель такого рынка была исследована в работах Гэри Эриксона (Erickson, 1997; Erickson, 2009a; Erickson, 2009b; Erickson, 2011), в которых описанные эффекты были получены аналитически и проверены на эмпирических данных. В модели Эриксона каждая из n фирм-олигополистов, управляя своими рекламными затратами, максимизирует приведенную прибыль вида 4.2.1. Динамика рыночных долей фирм задаётся в виде $\dot{S}_i(t) = \beta_i \alpha_i \sqrt{M - \sum_{j=1}^n S_j(t)} - \rho_i S_i(t)$. Эта модель,

фактически, является модификацией классической модели Видаля-Вольфа, учитывающей эффекты от рекламных усилий игроков для привлечения еще не задействованного потенциала рынка (покупателей, не принявших решение о покупке чьего-либо товара). Таким образом, здесь, в отличие от классической постановки, общие продажи всех участников рынка могут увеличиваться со временем. В качестве решения Эриксон рассматривает равновесие Нэша с обратной связью для двух случаев: симметричной и несимметричной олигополии. Корректность модели и адекватность аналитических результатов реальным эффектам подтверждается эмпирическими данными по пивному рынку с тремя фирмами-олигополистами (корпорации Anheuser-Busch, SABMiller, и Molson Coors; данные за 1989–2006 годы). Аналитически рассчитанные равновесные стратегии с высоким уровнем точности соответствуют реальному поведению этих фирм на рынке (соответствующие регрессионные модели имеют показатель R^2 от 0,7 до 0,9, а коэффициенты значимы на уровне 0,05). В работе (Erickson, 2009b) рассмотренная модель обобщается, для каждой из фирм добавляется возможность использования нескольких товарных брендов (так, что возможна конкуренция брендов одной фирмы друг с другом). Параметры этой модели также оценивались на основе эмпирических данных по рынку безалкогольных газированных напитков, включающим в себя трех основных производителей-лидеров и пять брендов «второго эшелона». Иной подход применяется в работе (Erickson, 1997). В ней изучается модель дуополии, в которой фирмы могут предвидеть реакцию конкурентов на текущее состояние рынка. Такая модель применяется к данным о рынке хлопьев для завтрака, и проведенное эмпирическое исследование показывает, что стратегии, основанные на предполагаемой динамике поведения конкурентов, лучше описывают реальное рекламное поведение производителей хлопьев, чем традиционные равновесные стратегии, построенные без возможности обратной связи.

Завершим текущий раздел обсуждением вторичных эффектов на олигопольном рынке, где фирмы могут управлять ценой на товар. Для иллюстрации основных эффектов воспользуемся ситуацией с двумя фирмами-производителями (дуопольный рынок). Оптимальное поведение участников рынка имеет вид, схожий с поведением монополии: оптимальная ценовая политика обоих заключается в поддержании цены на постоянном уровне, максимизирующем приведенную прибыль. Как и в случае монопольного рынка, оптимальное значение мгновенных рекламных затрат также является функцией не от времени, а только от мгновенной рыночной доли товара. Вообще, переход от дуопольного рынка к «неуправляемой» ценой к рекламно-ценовой дуополии похож во многом на аналогичный переход для случая монополии: большинство эффектов сохраняется за счет стационарности оптимальной цены. Если спрос линейно зависит от цены, то повышение эффективности рекламы фирмы повышает ее оптимальную цену, как и итоговую прибыль, а удорожание рекламы и повышение ценовой чувствительности – напротив, снижает. На оптимальную цену и прибыль соперника те же параметры оказывают диаметрально противоположный эффект. А вот оптимальные

рекламные затраты изменяются для обеих фирм одинаково: сокращаются с ростом стоимости рекламы, предельных издержек производства и ценовой чувствительности и растут с увеличением эффективности рекламы. Для спроса с постоянной эластичностью по цене наблюдаются точно такие же эффекты – что может свидетельствовать об их устойчивости относительно вида функции спроса (Krishnamoorthy et al., 2010).

Формально динамика уровня продаж фирмы i задается уравнением $\dot{S}_i(t) = r_i u_i(t) D_i(p_i(t)) \sqrt{M - S_i(t) - S_j(t)}$, где все обозначения имеют тот же смысл, что в случае монопольного рынка (Вартанов, 2020с; Sethi et al., 2008), а $D_i(p_i(t))$ – это функция спроса на товар фирмы i в зависимости от его цены. Вид функции спроса $D_i(p_i(t))$ в зависимости от типа (линейная или изоэластичная) также аналогичен рассмотренному в работе Сетхи 2008 года. Более того, сама рассматриваемая модель, по сути, представляет собой «дуопольную модификацию» рассмотренной в (Sethi et al., 2008) монопольной модели. Решением при этом выступает равновесие Нэша для динамической игры с полной информацией (игрокам известна полная история действий в любой момент).

Сравнивая результаты, полученные Кришнамурти и соавторами, с результатами Эриксона, можно заключить, что появление в руках фирм-участников ценовых инструментов не приводит к радикальному изменению их рекламной политики – как и в случае с монопольным рынком. Таким образом, наибольшее влияние на рынок в целом и на вторичные эффекты рекламы оказывает не количество фирм и не используемые ими рыночные инструменты, а особенности первичного воздействия рекламы на потребителей, как и предполагалось в начале главы. Это еще раз подтверждает, что базовый уровень классификации вторичных эффектов «завязан» на классификацию первичных эффектов.

Принципиальное изменение возникает тогда, когда первичное воздействие рекламы носит «комбинированный» характер: помимо собственно рекламы бренда фирм, производится также реклама самого типа предлагаемого товара. Таким образом, за счет рекламного воздействия на рынке увеличивается спрос на товар независимо от того, кто его производит. При этом реклама собственно бренда фирмы, как и раньше, уже оказывает влияние непосредственно на ее рыночную долю. Работа Басса (Bass et al., 2005) посвящена анализу влияния обеих компонент рекламной стратегии на динамику продаж в условиях дуополии, в предположении, что $Q(t) = S_1(t) + S_2(t)$ – общий спрос на товар равен сумме объемов продаж обеих фирм. Динамика этих объемов задается дифференциальным уравнением $\dot{S}_i(t) = \dot{S}_{i,g}(t) + \dot{S}_{i,b}(t)$, где $\dot{S}_{i,g}(t)$ и $\dot{S}_{i,b}(t)$ – изменения в объемах продаж, связанные с рекламой товара (generic) и собственно бренда фирм (brand advertising).

Обе фирмы на рынке пользуются результатами рекламы товара, поэтому $\dot{S}_{i,g}(t) = \theta_i(k_1(t)u_1(t) + k_2(t)u_2(t))$, где $\theta_i \in [0,1]$, а $u_j(t)$ и $k_j(t)$ – стратегия фирмы i по рекламе товара и эффективность такой рекламы соответственно. Изменения в продажах, вызванные рекламой бренда каждой из фирм, задаются дифференциальными уравнениями вида $\dot{S}_{i,b}(t) = \beta_i \hat{u}_i(t) \sqrt{S_j(t)} - \beta_j \hat{u}_j(t) \sqrt{S_i(t)}$, где \hat{u}_i и β_i – стратегия бренд-рекламы фирмы и ее эффективность соответственно. Для такой постановки задачи было найдено равновесие Нэша в дифференциальной игре с полной информацией, где в качестве функций выигрыша фирм использовалась их дисконтированная прибыль. Кроме того, описываемая модель рассматривалась в уточненной постановке, учитывающей ограниченность емкости

рынка. Для нее динамика продаж задавалась в следующем виде (M – общий потенциал рынка):

$$\dot{S}_i(t) = \beta_i \hat{u}_i(t) \sqrt{S_j(t)} - \beta_j \hat{u}_j(t) \sqrt{S_i(t)} + \theta_i (k_1(t) u_1(t) + k_2(t) u_2(t)) \sqrt{M - S_1(t) - S_2(t)}$$

Добавление множителя $\sqrt{M - S_1(t) - S_2(t)}$ к компоненте, отвечающей за рекламу товара в целом, отражает тот факт, что такая реклама привлекает только тех потребителей, которые еще не были информированы о нем на момент времени t .

На таком рынке существует единственное равновесие, в нем затраты каждой из фирм на рекламу своего бренда являются возрастающей функцией от объема продаж конкурента. В то же время затраты на рекламу самого товара (generic) в равновесии постоянны во времени (стационарны), как и цены на товары. Что касается оптимального распределения рекламных затрат между двумя типами рекламы, то, согласно результатам Басса и соавторов, то оно обладает следующей структурой. В начальные периоды следует более активно вкладываться в рекламу категории товара в целом, после чего постепенно снижать эти затраты, выводя на стационарный уровень. Затраты на рекламу бренда, напротив, должны увеличиваться со временем: в более ранние периоды они должны быть меньше, чем в более поздние. Кроме того, в рассматриваемой модели наблюдается эффект фрирайдера: совокупная реклама категории товара оказывается выше в том случае, когда фирмы образуют картель или принадлежат одному владельцу – по сравнению со случаем конкуренции между ними. Дело в том, что в «картельном» случае каждой фирме приходится делиться прибылью с конкурентами, что приводит к сокращению предельной эффективности рекламы товара в целом. Помимо этого эффекта, в «картельном» случае затраты на рекламу брендов также приобретают специальный вид: оптимальная стратегия предполагает ненулевые инвестиции в рекламу только одного бренда, в то время как второй бренд не рекламируется вообще. Объяснение такого эффекта очевидно: из двух брендов один является более прибыльным, чем другой, поэтому картелю выгоднее «переместить» на него весь спрос на данный товар с помощью рекламы, «не мешая» этому процессу рекламой менее прибыльного бренда.

Долгосрочные вторичные эффекты. Модели Нерлова-Эрроу

В работе Висколани (Viscolani and Zaccour, 2009) исследуется модель дуополии, в которой текущие объемы продаж фирм пропорциональны запасам гудвилла, накопленным к этому моменту каждой из них. На накопление гудвилла фирмы оказывают влияние рекламные вложения как самой этой фирмы (увеличивают), так и фирмы-конкурента (уменьшают за счет антирекламы). Динамика его описывается следующим дифференциальным уравнением: $\dot{A}_i(t) = \gamma_i u_i(t) - \eta_{ij} \gamma_j u_j(t) - \delta A_i(t)$, $A_i(0) = \bar{A}_i > 0$, для $i, j = 1, 2, i \neq j$. Здесь $\gamma_i \geq 0$ – эффективность рекламных вложений, сделанных фирмой i , η_{ij} – показатель негативного воздействия на гудвилл фирмы i со стороны рекламы товара фирмы j (эффективность рекламы этой фирмы как антирекламы ее конкурента), а $\delta > 0$, как обычно, – параметр деградации гудвилла. Спрос на товар каждой из фирм в каждый момент времени пропорционален запасу ее гудвилла на этот момент: $S_i(t) = \beta A_i(t)$. Каждая фирма максимизирует свой приведенный доход. В описываемой работе показывается, что в случае примерно равной силы фирм (одинаковой

эффективности их рекламы) в модели существует единственное равновесие Нэша, совпадающее с равновесием для случая, когда влияние рекламы конкурента на гудвилл каждой из фирм отсутствует. В другой работе – Чинтагунта (Chintagunta, 1993) – проверялась состоятельность гипотезы о нечувствительности прибыли фирмы к изменениям в ее оптимальной рекламной стратегии для НЭ-модели дуополии с эффектом переноса. Авторы использовали эмпирические данные по фармацевтической отрасли для оценки параметров функции реакции потребителей на рекламу, после чего, подставляя полученную оценку этой функции в аналитическую модель, определяли равновесные рекламные стратегии обеих фирм.

Наир и Нарасимхан (Nair and Narasimhan, 2006) используют математический аппарат дифференциальной теории игр для моделирования дуополистического рынка с рекламой, где формирование и накопление гудвилла зависит от интенсивности рекламы и качества товара. Каждая фирма определяет цену товара, уровень вложений в рекламу и уровень вложений в качество продукции, при этом максимизируя целевую функцию – приведенную прибыль. В указанной работе авторы описывают спрос на товар фирмы i в момент времени $t \in [0, \infty)$ как $S_i(t) = \max \left\{ 0, [\alpha - \beta p_i(t)] \left[g_1 A_i(t) - g_2 \frac{[A_i(t)]^2}{2} \right] \right\}$, где α , β , g_1 и g_2 – положительные константы, а $p_i(t)$ и $A_i(t)$ – цена и гудвилл фирмы i в момент времени t соответственно. Динамика гудвилла имеет вид: $\dot{A}_i(t) = q_i(t) - \theta_q q_j(t) + u_i(t) - \theta_u u_j(t) - \delta A_i(t)$, $A_i(0) = \bar{A}_i$, где $q_i(t)$ и $u_i(t)$ – это качество товара и вложения в рекламу фирмы i в момент времени t , а $\delta > 0$ – параметр деградации гудвилла.

В работе Бертуцци и Ламбертини (Bertuzzi and Lambertini, 2010) описывается модель дифференциальной игры, в которой две фирмы конкурируют на рынке некоего товара с горизонтальной дифференциацией, а их стратегиями являются расположение (параметр горизонтальной дифференциации), цена на товар и вложения в рекламу. Подобно модели Хотеллинга, потребители в модели Бертуцци и Ламбертини равномерно распределены на единичном интервале. В каждый момент времени t максимальная емкость рынка (т.е. общее количество потенциальных покупателей) равно $M(t)$. В момент времени t фирма i выбирает свое расположение $y_i(t) \in [0, 1]$. Покупатель, находящийся в точке $l \in [0, 1]$, покупая одну единицу товара фирмы i , получает выигрыш в размере $U = s - p_i(t) - g(y_i(t) - l) \geq 0$, где s – резервная цена покупателя, $p_i(t)$ – цена на товар, а $g(\cdot)$ – функция транспортных издержек. Предполагая линейность транспортных издержек ($g(y_i(t) - l) = k \cdot |y_i(t) - l|$), Бертуцци и Ламбертини показывают, что «безразличный» покупатель (получающий одинаковый выигрыш от покупки товара как первой, так и второй фирмы) располагается в точке $\bar{l}(t) \equiv \left[p_2(t) - p_1(t) + k(y_1(t) + y_2(t)) \right] / 2k$, следовательно, мгновенный спрос на товар первой и второй фирм соответственно имеет вид: $S_1(t) = M(t)\bar{l}(t)$ и $S_2(t) = M(t) - S_1(t)$. Фирмы могут увеличить общий спрос на товар, инвестируя в рекламу. Показатель общего спроса обладает динамикой, задаваемой уравнением $\dot{M}(t) = \alpha[u_1(t) + u_2(t)] - \delta M(t)$, где $u_i(t)$ – затраты фирмы i на рекламу, α – эффективность рекламы, а $\delta > 0$ – параметр деградации гудвилла.

Близкий подход применялся в работе Челлини и Ламбертини (Cellini and Lambertini, 2003). В этой статье рассматривалась модель олигополии Курно с $n \geq 2$ фирмами, продающими в каждый момент времени t однородный товар. Все фирмы в такой модели обладали нулевыми предельными издержками, а обратная функция спроса предполагалась имеющей вид $p(t) = [p_R(t) - S(t)]^{1/\alpha}$, где $p(t)$

– цена на товар, $p_R(t)$ – резервная цена потребителей, $S(t) = \sum_{i=1}^n S_i(t)$ – общее предложение товара всех фирм, $\alpha > 0$ – параметр «искривления» спроса. Функция $S(t)$ выпукла, если $\alpha \in (0,1)$, линейна, если $\alpha = 1$ и вогнута, если $\alpha \in (1, +\infty)$.

Присутствующие на рынке n фирм могут увеличить значение $p_R(t)$ (тем самым повышая спрос на товар), увеличивая вложения в рекламу. При этом динамика резервной цены описывается дифференциальным уравнением: $\dot{p}_R(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) - \delta p_R(t)$, $p_R(0) = \bar{p}_R$. Каждая фирма максимизирует свой приведенный доход. В описываемой статье авторы находят в явном виде и исследуют свойства равновесий с обратной связью и без нее. Показано, что они существенно зависят от параметра α кривизны функции спроса. Кроме того, в работе показывается, что оптимальные вложения в рекламу в равновесии с обратной связью всегда выше, чем в равновесии без нее.

Работы, посвященные этому направлению модификаций моделей Нерлова-Эрроу, отличаются, как правило, тем, какими свойствами обладает случайный процесс, стоящий в правой части уравнения динамики гудвилла. В ранних работах стохастические варианты модели Нерлова-Эрроу, как правило, основаны на модели случайного блуждания (Rishel 1985; Tapiero, 1975a; Tapiero, 1975b), а также на моделях распределенного лага и их приближениях (Rao, 1986). Дальнейшее развитие этот подход получил в работе Рамана (Raman, 2006), где решалась краевая задача оптимального стохастического управления рекламной кампанией, в котором целевая функция зависит цены товара в терминальный момент горизонта планирования. Подобно тому, как это было сделано в работе Рао (Rao, 1986), у Рамана постулируется, что динамика гудвилла описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dA(t) = [\beta u(t) - \delta A(t)]dt + \sigma d\omega(t)$, где $A(0) = A_0$. Здесь σ – бесконечно малое стандартное квадратическое отклонение, а $\omega(t)$ – стандартный Броуновский процесс. Работа Рамана посвящена поиску оптимальной рекламной стратегии $u(t)$, а также оптимальной длины горизонта планирования. Близкая модель с конечным горизонтом планирования рассматривается в работе Маринелли (Marinelli, 2007). В ней решается задача оптимального управления интенсивностью рекламной кампании для фирмы, выпускающей новый товар на рынок. Целью этой фирмы является максимизация полезности от гудвилла, накопленного к моменту старта продаж (он же – конец горизонта планирования), и минимизация потока затрат на рекламу до момента старта продаж. В работе в классическую НЭ-модель вносятся стохастические модификации, в результате чего динамика гудвилла описывается уравнением $dA(t) = [u(t) - \rho A(t)]dt + \sigma(A(t), u(t))d\omega(t)$, где $A(0) = A_0$. Здесь: ρ – положительная константа, $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица, а управление $u(t)$ (интенсивность затрат на рекламу) – измеримая функция, принимающая значения из U – замкнутого подмножества неотрицательной числовой полуоси $[0, +\infty)$.

В работе Гоцци (Gozzi et al., 2009) рассматривается класс динамических задач моделирования рекламы для фирм с возможностью переноса и распределенного эффекта забывания. Это означает, что величина гудвилла зависит не только от его значения в предыдущие моменты времени, но и от предыдущих уровней интенсивности рекламы. Стратегией фирмы в такой модели является выбор уровня вложений в рекламную кампанию, а динамика гудвилла в зависимости от этой стратегии описывается уравнением: $dA(t) = \left[\lambda_0 A(t) + \int_{-\gamma}^0 \lambda_1(\theta) A(t + \theta) d\theta + \hat{\lambda}_0 u(t) + \int_{-\gamma}^0 \hat{\lambda}_1(\theta) u(t + \theta) d\theta \right] dt + \sigma d\omega(t)$, при $t_0 \leq t \leq T$, $A(t_0) = A_0$,

$A(t_0 + \theta) = A_1(\theta) \geq 0$, $A(t_0 + \theta) = \delta(\theta)$, а $\theta \in [-\gamma, 0]$. В этой модели предполагается, что уровень затрат на рекламу $u(t)$ ограничен, его значения выбираются из множества U , а сам он является элементом пространства -адаптированных случайных процессов со значениями из компакта $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}_+$. Более того, предполагается, что: i) $\lambda_0 \leq 0$ и $\lambda_1(\cdot) \in L^2([-\gamma, 0], \mathbb{R})$; ii) $\hat{\lambda}_0 \geq 0$ и $\hat{\lambda}_1(\cdot) \in L^2([-\gamma, 0], \mathbb{R})$; и iii) $\delta(\cdot) \geq 0$. Здесь λ_0 и $\lambda_1(\cdot)$ описывают процесс деградации гудвилла после завершения рекламной кампании, а $\hat{\lambda}_0$ и $\hat{\lambda}_1(\cdot)$ описывают эффект текущего и прошлого рекламного воздействия на уровень гудвилла. Величины A_0 , $A_1(t)$ и $\delta(\cdot)$ отражают начальный уровень гудвилла и траектории рекламного воздействия.

Медийно-зависимые вторичные эффекты рекламы

В предыдущей части настоящей работы, посвященной первичным эффектам рекламного воздействия (Вартанов, 2020b), обсуждалось, что как краткосрочные, так и долгосрочные первичные эффекты рекламного воздействия могут различаться в зависимости от того, по какому каналу доставки информация попала к потребителю. В случае со стационарными вторичными эффектами канал доставки рекламы редко играет существенную роль, в отличие от структуры рынка – здесь важной оказывается только схема продажи рекламы, различная для разных каналов. Так, большая часть вторичных эффектов рекламы вообще не зависит от того, как реклама попадает к потребителю.

С другой стороны, для некоторых способов доставки рекламы способы продажи рекламы существенно влияют на поведение производителей даже безотносительно того, какие эффекты она окажет потом на потребительское поведение. В частности, особенно зависит от механизма продажи интернет-реклама: в отличие от других средств доставки контента, продажей львиной доли онлайн-рекламы управляют им несколько крупных игроков, определяющих, кому из потребителей показать рекламу и чью именно. Согласно ряду оценок, больше половины всей онлайн-рекламы составляет поисковая контекстная реклама (Давыдов, Измалков, Смирнов, 2015). Для такого типа рекламы сообщения размещаются в основном с помощью аукционов, в которых используются данные о пользователях (поисковые фразы, информация на личных страницах, история покупок и т.д.).

При продаже контекстной рекламы наиболее распространен обобщенный аукцион второй цены. Механизм его реализации в общих чертах следующий. При каждом поисковом запросе происходит аукцион за право разместить рекламное сообщение на фиксированных позициях выдачи результатов запроса. Ставки фирм при этом определенным образом упорядочиваются (обычно по размеру, либо по произведению размера ставки на некоторый параметр, характеризующей качество ставки). В соответствии с этим порядком фирмы получают места в списке выдачи результатов запроса и платят за размещение только в том случае, если пользователь кликнул на их объявление. Плата при этом равна минимальной ставке, необходимой для размещения на полученной позиции (т.е. фирма платит не свою ставку, а следующую за ней).

Среди работ, выпущенных в последние годы, возрастает число тех, что посвящены анализу кросс-медийных эффектов рекламы – то есть тех, которые возникают при использовании нескольких каналов доставки рекламы до потребителя (ТВ, Интернет, радио, и т.д.). При этом класс используемых для этого моделей бывает различным – наиболее ранние из них основаны на модели Сетхи (класс ВВ-моделей), однако более поздние работы базируются на гудвилл-моделях (класс НЭ-моделей). Например, для решения задачи исследования обобщенной маркетинговой коммуникации в условиях неопределенности может быть

использована стохастическая модель Видаля-Вольфа в форме Сетхи. Так, Прасад и Сетхи (Prasad and Sethi, 2009) исследуют модель выбора особенностей маркетинговых коммуникаций в условиях неопределенности и конкуренции, где фирма обладает широким набором доступных каналов коммуникации с рынком (ТВ, печатные СМИ, рекламные брошюры) и вариантов рекламного поведения (конкурентная реклама, промоушн-акции). Лежащая в основе работы модель является модификацией модели, предложенной в работе Сетхи (Sethi, 1983), однако с учетом возможности принятия одновременно нескольких решений о рекламной кампании:

$$dx(t) = \left[U(u(x(t)), v(x(t))) \sqrt{1-x(t)} - kx(t) \right] dt + \sigma(x(t)) d\xi,$$

где $k, \sigma(x(t))$ и $d\xi(t)$ – те же, что и в модели Sethi [139]; $u(x(t)), v(x(t))$ – затраты на рекламу в момент t для двух различных рекламных инструментов, а $U(u(x(t)), v(x(t))) \equiv \rho_u u(x(t)) + \rho_v v(x(t)) + \hat{k} \sqrt{u(x(t)) \cdot v(x(t))}$, где ρ_u, ρ_v – уровни эффективности рекламных инструментов, а \hat{k} – параметр силы синергетического эффекта их одновременного применения.

Несмотря на то, что ряд работ по анализу оптимального поведения фирм на рынке с несколькими каналами доставки рекламы базируется на модели Сетхи, предполагающей, как и прочие ВВ-модели, убеждающее воздействие, куда большее распространение для решения подобных задач получили гудвилл-модели. Так, в работе Kim and Balachander (2010) рассматривалась модель динамической олигополии, динамика спроса в которой определялась согласно классической модели Нерлова-Эрроу. Авторами исследовалось, как затраты на доставку рекламы до одного потребителя через традиционные медиа влияют на его оптимальную стратегию размещения контекстной рекламы и рекламы в Интернет-поисковиках. Так, одним из их результатов стало то, что рекламодателям выгодно координировать поисковую рекламу с традиционной, даже если предельные затраты на это довольно высоки. Бергеманн и Бонатти (Bergemann and Bonatti, 2011) анализировали задачу таргетирования рекламы в ситуации, когда фирмам доступны несколько медиаканалов, где они могут разместить рекламу своей продукции. На рынке присутствуют несколько производителей-фирм, а потребители, разделенные на несколько сегментов, характеризуются своими предпочтениями на рынке товаров, а также своим положением в пространстве медиапредпочтений. Каждый производитель продает свой товар в «свой» сегмент «товарного» рынка, кроме того, в их распоряжении имеется ряд медиаканалов, обладающих своей аудиторией. Эта аудитория задается распределением на пространстве медиапредпочтений. Таким образом, фирмы могут таргетировать свою рекламу на интересующих их потребителей за счет выбора медиаканалов, аудитория которых наиболее близка к требуемой группе. В такой модели конкурентное равновесие характеризуется следующим свойством: увеличение «таргетированности» рекламы (то есть, уменьшение каналов доставки рекламы, используемое каждым рекламодателем, с одновременным ростом затрат на рекламу с их помощью) приводит к увеличению количества покупок потребителями их наиболее предпочитаемого товара, то есть к росту потребительского излишка. Обратной стороной этого же результата является рост рыночной концентрации в каждом из сегментов рынка, вплоть до полной монополизации фирмами своих «целевых» сегментов с их уходом из «чужих» сегментов.

В работе Буратто (Buratto et al., 2006а) для анализа случая нескольких каналов доставки рекламного контента была расширена модель Нерлова-Эрроу. При этом каналы обладают разной эффективностью воздействия на разные сегменты

потребителей. Для каждого отдельного канала в базовом уравнении в качестве управляющего параметра подставлен член $\gamma(a)\varphi(u(t))$. Здесь $\gamma(a)$ – это «спектр» воздействия канала (его эффективность для доставки рекламы именно в сегмент a , например, показатель аффинитивности телеканала по отношению к целевой социально-демографической группе), нормированный так, что $\sum_{a \in \Omega} \gamma(a) = 1$, а $\varphi(u(t)) \geq 0$ – эффективный уровень рекламного воздействия, оказываемый данным каналом. Здесь учитывается, что отдача от вложений в рекламу на разных каналах может быть разной, и каждому возможному каналу доставки рекламы соответствует пара $(\gamma(a), \varphi(u(t)))$. Затем, предполагая конкретный вид функции $\varphi(u(t)) = s_i \sqrt{u_i(t)}$, авторы ищут решение задачи фирмы, выбирающей из n доступных ей каналов доставки рекламы наилучший для запуска кампании, предшествующей старту продаж. В отличие от работ коллектива Буратто (Buratto et al., 2006a, 2006b), использовавших обыкновенные дифференциальные уравнения для описания динамики гудвилла и воздействия на него рекламы, Маринелли и Савин (Marinelli and Savin, 2008) предложили использовать для той же цели уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial A(t, \hat{a})}{\partial t} = -\delta A(t, \hat{a}) + \Delta_{\hat{a}} A(t, \hat{a}) + b(\hat{a})u(t, \hat{a})$$

Здесь \hat{a} – пространственная координата («идеальная точка»), описывающая тип потребителя, $A: [0, T] \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$, $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ – «плотность» распределения гудвилла в пространстве идеальных точек потребителя, $u(t, \hat{a})$ – рекламные затраты фирмы, а $b(\hat{a})$ – коэффициент эффективности рекламной кампании по отношению к потребителю типа \hat{a} . Второе слагаемое в уравнении (1) – $\Delta_{\hat{a}} A(t, \hat{a})$ – описывает эффект пространственного распределения накопленного фирмой гудвилла.

Схожая задача возникает, когда у производителя товара есть в распоряжении один канал доставки рекламы, однако рекламная кампания содержит несколько отличных тем (образов, слоганов и т.д.). На практике фирмы-рекламодатели часто используют различные темы в рекламе – цены на товар, их свойства – и в рамках каждой из них предполагаются разные типы рекламных сообщений или действий. Для того, чтобы проанализировать оптимальный способ организации такого «разнородного» рекламного воздействия, в работе Басса (Bass et al., 2007) рассматривается модель рекламной кампании, использующей $k \geq 2$ рекламных тем.

При построении этой модели были посчитаны воздействия эффекта забывания для различных рекламных тем и особенности взаимодействия между ними с использованием байесовской динамической линейной модели. В модели Басса рекламная динамика описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= \sum_{i=1}^k \psi_i(t) \left[g_i(u_i(t)) + \lambda_i \sum_{j=1, j \neq i}^k h(u_i(t), u_j(t)) \right] - \delta A(t) \\ \dot{\psi}_i(t) &= -a(u_i(t))\psi_i(t) + \delta [1 - I(u_i(t))] [1 - \psi_i(t)] \end{aligned}$$

Здесь, как и прежде, $A(t)$ – запас гудвилла, а $\psi_i(t)$ – эффективность рекламной темы под номером i ($i = 1, \dots, k$), $g_i(u_i(t))$ – функция эффективности вложений в тему i , а $a(u_i(t)) \equiv c_i + w_i u_i(t)$, где c_i – уровень износа темы (усталости

потребителя от нее), а w_i – уровень вторичного износа темы (усталости от повторения одной и той же рекламы). Кроме того, слагаемое $\lambda_i \sum_{j=1, j \neq i}^k h(u_i(t), u_j(t))$ характеризует результат взаимодействия между темой i и другими темами, а $I(u_i(t))$ – индикаторная функция, равная единице при наличии затрат на тему i , и нулю при их отсутствии.

Эта модель проверялась авторами эмпирически: было проанализировано большое количество данных о спросе на телекоммуникационные услуги разных видов (локальные, междугородные и международные звонки), частоты упоминания в СМИ пяти типов рекламных тем, каждая из которых была направлена на повышение интереса к предлагаемой услуге различными способами:

1. *«Рациональные тематики»:*
 - a. реклама специальных предложений услуг;
 - b. реклама специальных ценовых акций;
2. *«Эмоциональные тематики»:*
 - a. реклама, стимулирующая звонки;
 - b. реклама, направленная на возвращение ушедших клиентов;
 - c. закрепляющая реклама для действующих клиентов.

Рекламные затраты для каждой тематики оценивались с помощью GRP. Проведенный анализ показал, что кросстематические эффекты для «эмоциональных» тем носят негативный характер: взаимодействие между рекламой различных тематик снижает общий запас гудвилла. В то же время, в группе «рациональных» тематик кросстематические эффекты оказались незначимы. Это связано с различием в их механизмах воздействия: кросстематические эффекты появляются лишь в случае убеждающего воздействия рекламы («эмоциональные тематики»), в то время как информирующее воздействие («рациональные») к аналогичным эффектам не приводит.

Заключение

В настоящей работе были рассмотрены и систематизированы вторичные эффекты рекламной конкуренции для рынков несовершенной конкуренции различных типов. Классификация таких эффектов во многом схожа с классификацией индивидуальных вторичных эффектов, и это не удивительно – ведь сходные вторичные эффекты представляют собой результат влияния на рынки с различной структурой множества производителей одних и тех же первичных эффектов. Однако вторичные эффекты, рассмотренные в настоящей работе, свойственны лишь для тех рынков, где производители вступают в рекламную коммуникацию с потребителями напрямую, минуя посредников, принимающих решения. На самом деле это предположение носит ограничительный характер. Как было рассмотрено в последнем разделе настоящей статьи, тип канала, по которому производитель направляет потребителю рекламу, сам по себе порождает вторичные эффекты, действием которых нельзя пренебрегать. В действительности же каждый канал доставки рекламы до потребителя не представляет собой абстрактный «черный ящик», а является фирмой-посредником, предоставляющей производителю определенного рода услуги – либо размещая в контенте его рекламные сообщения (медиафирмы, сейлс-хаусы), либо перепродавая товары и производя рекламные и промоакции товара самостоятельно (ритейлеры). Возникновение подобного рода производственных цепочек, основанных на взаимодействии производителей и посредников относительно размещения рекламы, порождает класс экономических

эффектов рекламы как общественного института более высокого уровня – третичные эффекты. Их обсуждению и обзору посвящена последняя часть настоящего цикла статей.

Список источников / References

1. *Bierman, H.S. and L. Fernandez* (1998), *Game Theory with Economic Applications* (second edition), Addison-Wesley, Reading.
2. *Nicholson, W.* (1995), *Microeconomic Theory* (sixth edition), The Dryden Press, Fort Worth.
3. *Waldman, D.E. and E.J. Jensen* (1997), *Industrial Organization: Theory and Practice*, Addison-Wesley, Reading.
4. *Schoonbeek L., Kooreman P.* (2007) The impact of advertising in a duopoly game // *International Game Theory Review*. 2007. Vol. 9 (04), 565-581.
5. *Ishigaki H.* (2000) Informative advertising and entry deterrence: a Bertrand model // *Economics Letters*. 2000. Vol. 67 (3), 337-343.
6. *Cubbin, J.S., and Domberger, S.* (1988) "Advertising and post-entry oligopoly behaviour", *Journal of Industrial Economics*, 37 (1988) 123-140
7. *Kuzmanović M., Kovačević-Vujčić V., Martić M.* (2011) Three-stage entry game: the strategic effects of advertising // *Yugoslav Journal of Operations Research*. 2011. Vol. 21 (2), 163-185.
8. *S. P. Sethi and G. L. Thompson.* (1981) *Optimal Control Theory: Applications to Management Science*. Martinus Nijhoff Publishing Co., Boston, 1981
9. *S. Jørgensen and G. Zaccour.* (2004) *Differential Games in Marketing*. Kluwer, Academic Publishers, Boston, MA, 2004
10. *G. M. Erickson.* (1995) Differential game models of advertising competition. *European Journal of Operational Research*, 83(3):431.438, 1995
11. *G. Feichtinger, R. F. Hartl, and S. P. Sethi.* (1994) Dynamic optimal control models in advertising: Recent developments. *Management Science*, 40(2):196.226, 1994
12. *S. P. Sethi.* (1977) Dynamic optimal control models in advertising: A survey. *SIAM Review*, 19(4):685. 725, 1977
13. *G. M. Erickson.* (1992) Empirical analysis of closed-loop duopoly advertising strategies. *Management Science*, 38(12):1732.1749, 1992
14. *P. K. Chintagunta and N. J. Vilcassim.* (1992) An empirical investigation of advertising strategies in a dynamic duopoly. *Management Science*, 38(9):1230-1244, 1992.
15. *G. E. Fruchter and S. Kalish.* (1997) Closed-loop advertising strategies in a duopoly. *Management Science*, 43(1):54.63, 1997
16. *Prasad and S. P. Sethi.* (2004) Competitive advertising under uncertainty: A stochastic differential game approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 123(1):163.185, 2004.
17. *G. M. Erickson.* (2009a) An oligopoly model of dynamic advertising competition. *European Journal of Operational Research*, 197(1):374.388, 2009
18. *G. M. Erickson.* (1997) Dynamic conjectural variations in a lanchester oligopoly. *Management Science*, 43(1):1603.1608, 1997.
19. *G. M. Erickson.* (2009b) Advertising competition in a dynamic oligopoly with multiple brands. *Operations Research*, 57(5):1106.1113, 2009.
20. *G. M. Erickson.* (2011) A differential game model of the marketing-operations interface. *European Journal of Operational Research*, 211(2):394.402, 2011.
21. *Krishnamoorthy, A. Prasad, and S. P. Sethi.* (2010) Optimal pricing and advertising in a durable good duopoly. *European Journal of Operational Research*, 200(2):486.497, 2010.
22. *F. M. Bass, A. Krishnamoorthy, A. Prasad, and S. P. Sethi.* Generic and brand advertising strategies in a dynamic duopoly. *Marketing Science*, 24(4):556-568, 2005
23. *B. Viscolani and G. Zaccour.* (2009) Advertising strategies in a differential game with negative competitor's interference. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 140(1):153.170, 2009.
24. *P. K. Chintagunta.* (1993) Investigating the sensitivity of equilibrium profits to advertising dynamics and competitive effects. *Management Science*, 39(9):1146-1162, 1993.

25. *Nair and R. Narasimhan.* (2006) Dynamics of competing with quality- and advertising-based goodwill. *European Journal of Operational Research*, 175(1):462-474, 2006.
26. *G. Bertuzzi and L. Lambertini.* (2010) Existence of equilibrium in a differential game of spatial competition with advertising. *Regional Science and Urban Economics*, 40(2.3):155-160, 2010
27. *R. Cellini and L. Lambertini.* (2003) Advertising in a differential oligopoly game. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 116(1):61-81, 2003.
28. *R. Rishel.* (1985) A partially observed advertising model. In G. Feichtinger, editor, *Optimal Control Theory and Economic Analysis*, pages 253-262. North-Holland, Amsterdam, 1985
29. *A.S. Tapiero.* (1975a) On-line and adaptive optimum advertising control by a diffusion approximation. *Operations Research*, 23(5):890-907, 1975.
30. *A.S. Tapiero.* (1975b) Optimal advertising and goodwill under uncertainty. Technical Report 50, Graduate School of Business, Columbia University, New York, 1975
31. *Raman, K.* (2006). Boundary value problems in stochastic optimal control of advertising. *Automatica*, 42(8), 1357-1362.
32. *Marinelli, C.* (2007). The stochastic goodwill problem. *European Journal of Operational Research*, 176(1), 389-404.
33. *Gozzi, F., Marinelli, C., & Savin, S.* (2009). On controlled linear diffusions with delay in a model of optimal advertising under uncertainty with memory effects. *Journal of optimization theory and applications*, 142(2), 291-321.
34. *Давыдов, Д. В., Измалков, С. Б., & Смирнов, А. С.* (2015). Рынки контекстной рекламы: эмпирические и экспериментальные работы. Журнал Новой экономической ассоциации, №4 (28), с. 56–73.
35. *S. P. Sethi.* Deterministic and stochastic optimization of a dynamic advertising model. *Optimal Control Application and Methods*, 4(2):179-184, 1983.
36. *Bergemann, D., & Bonatti, A.* (2011). Targeting in advertising markets: implications for offline versus online media. *The RAND Journal of Economics*, 42(3), 417-443.
37. *Buratto, L. Grosset, and B. Viscolani.* (2006a) Advertising channel selection in a segmented market. *Automatica*, 42(8):1343-1347, 2006.
38. *Buratto, L. Grosset, and B. Viscolani.* (2006b) Advertising a new product in a segmented market. *European Journal of Operational Research*, 175(2):1262-1267, 2006.
39. *Marinelli, C., & Savin, S.* (2008). Optimal distributed dynamic advertising. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 137(3), 569-591.
40. *F. M. Bass, N. Bruce, S. Majumdar, and B. P. S. Murthi.* (2007) Wearout effects of different advertising themes: A dynamic Bayesian model of the advertising-sales relationship. *Marketing Science*, 26(2):179-195, 2007.

Сведения об авторе / About author

Вартанов Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры эконометрики и математических методов экономики Московской школы экономики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. 119234 Россия, Москва, Ленинские Горы, д.1, стр. 61. *E-mail: sergvar@gmail.com*

Sergey A. Vartanov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Chair of Econometrics and Mathematical Methods in Economics, Moscow School of Economics, Lomonosov Moscow State University. Bldg. 61, 1 Lenin Hills, Moscow, Russia 119234.

E-mail: sergvar@gmail.com